Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen

Probleme des Mathematikunterrichts

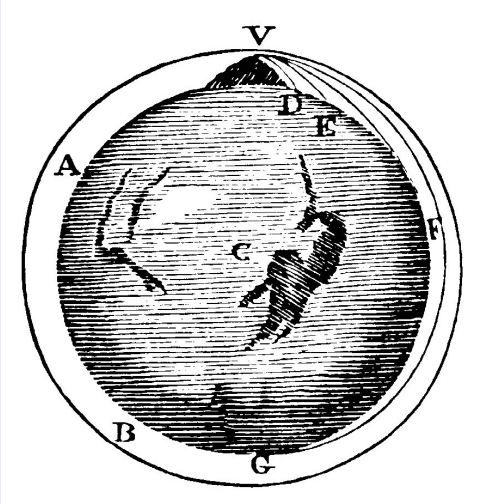
26.3.2012

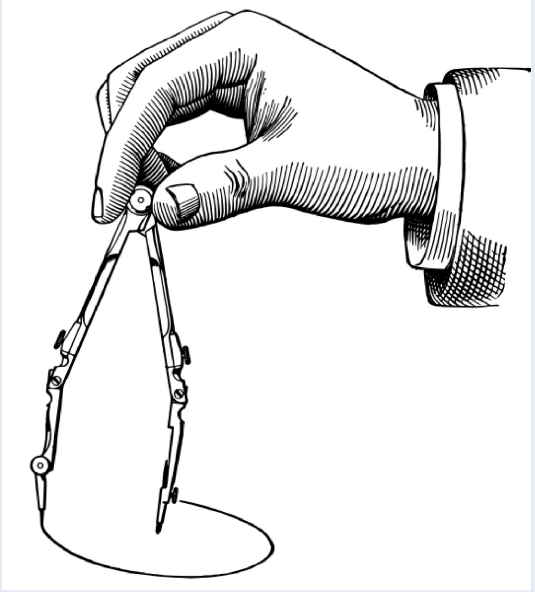
Josef Lechner (lejos@aon.at)

BG/BRG Amstetten

Ein einleitendes Beispiel

Beispiel: Welche Vorstellungen verbinden sie mit dem Wort Kreis ?

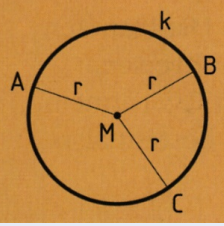




Beispiel: Woran sollen Schülerinnen und Schüler beim Kreis denken?

1.Klasse:

Kreis



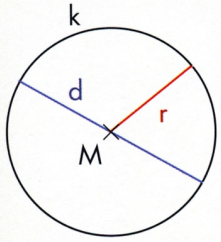
Alle **Punkte eines Kreises k** haben **vom Mittelpunkt denselben Abstand**, nämlich den **Radius r.** Es gilt zB: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$

Es gilt auch umgekehrt:
Alle Punkte, die **vom Punkt M denselben Abstand r** haben, liegen **auf dem Kreis k**.

4.Klasse:

Alle **Punkte** eines **Kreises** haben vom **Mittelpunkt denselben Abstand** (Radius r).

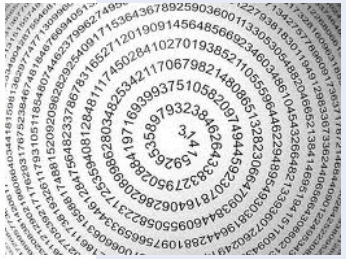
Durchmesser und **Umfang** eines Kreises stehen in Beziehung zueinander.



Umfang = Durchmesser mal pi

$u = d \cdot \pi$ oder

$u = 2r \cdot \pi$



Flächeninhalt = Radius zum Quadrat mal pi

$A = r^2 \cdot \pi$

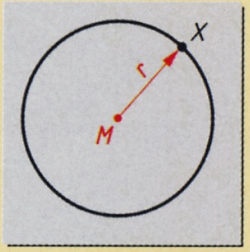
π ist die **Kreiszahl**. Sie hat unendlich viele Dezimalstellen und ist nicht periodisch.
Ihr **gerundeter Wert** beträgt 3,14.

7.Klasse:

Definition: Die Menge aller Punkte X (der Ebene), die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist die Kreis*linie* k mit Mittelpunkt M und Radius r:

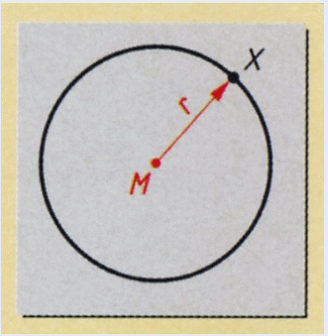
$$k[M;r] = \{X \mid \overline{XM} = r\}$$

Die *abgeschlossene* Kreis*scheibe* ist die Punktmenge $\{X \mid \overline{XM} \leqslant r\}$ („Inneres“ plus „Rand“).
Die *offene* Kreis*scheibe* ist die Punktmenge $\{X \mid \overline{XM} < r\}$ („Inneres“ ohne „Rand“).



Das ist Mathematik 1 / MathematiX4 / Mathematik-Lehrbuch 7

Beispiel: Der „vektorielle“ Kreis



$$k \ldots |X - M| = r$$

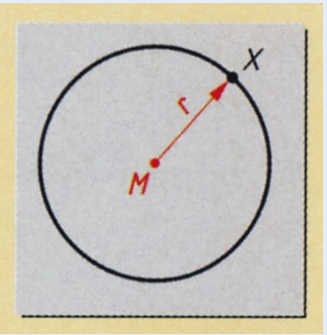
$$k \ldots \left| \begin{pmatrix} x - m_x \\ y - m_y \end{pmatrix} \right| = r$$

$$k \ldots (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

$$k \ldots x^2 - 2xm_x + m_x^2 + y^2 - 2ym_y + m_x^2 = r^2$$

$$k \ldots x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Beispiel: Der „vektorielle“ Kreis



$$k \ldots |X - M| = r \qquad k \ldots \left| \begin{pmatrix} x - m_x \\ y - m_y \end{pmatrix} \right| = r$$

$$k \ldots (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

$$k \ldots x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

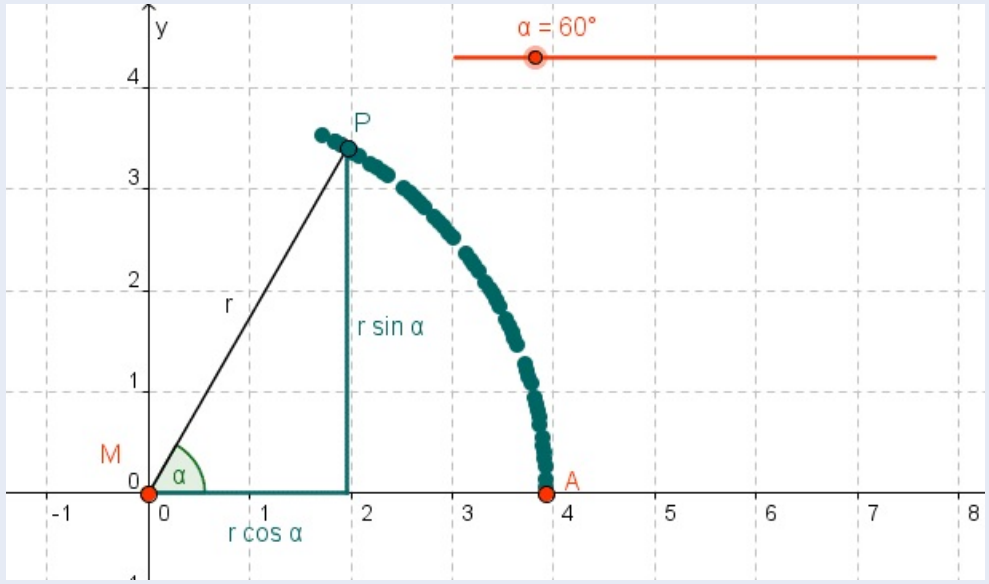
Kenntnisse/Wissen:

- Kreisgleichung in Vektorform kennen.
- Kreisgleichung in Koordinatenform kennen.
- Allgemeine Kreisgleichung kennen.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

- Kreisgleichung aus Punkt und Radius aufstellen können.
- Aus allgemeiner Kreisgleichung Mittelpunkt und Radius ermitteln können.

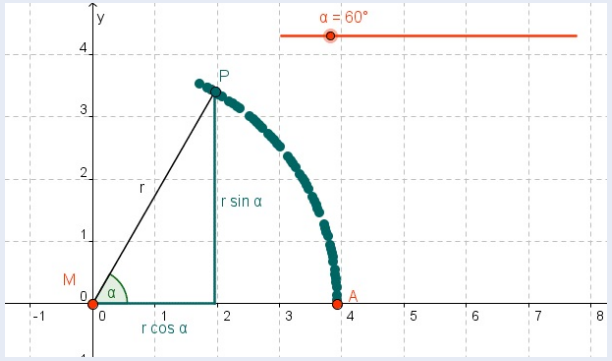
Beispiel: Der „dynamische“ Kreis



$$k \ldots X(t) = \begin{cases} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad mit \;\; t \in [0;2\pi[$$

http://thema-mathematik.at/tmwiki/doku.php?id=tmwiki:parameterdarstellung_des_kreises

Beispiel: Der „dynamische“ Kreis



$$k \ldots X(t) = \begin{cases} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad mit \;\; t \in [0;2\pi[$$

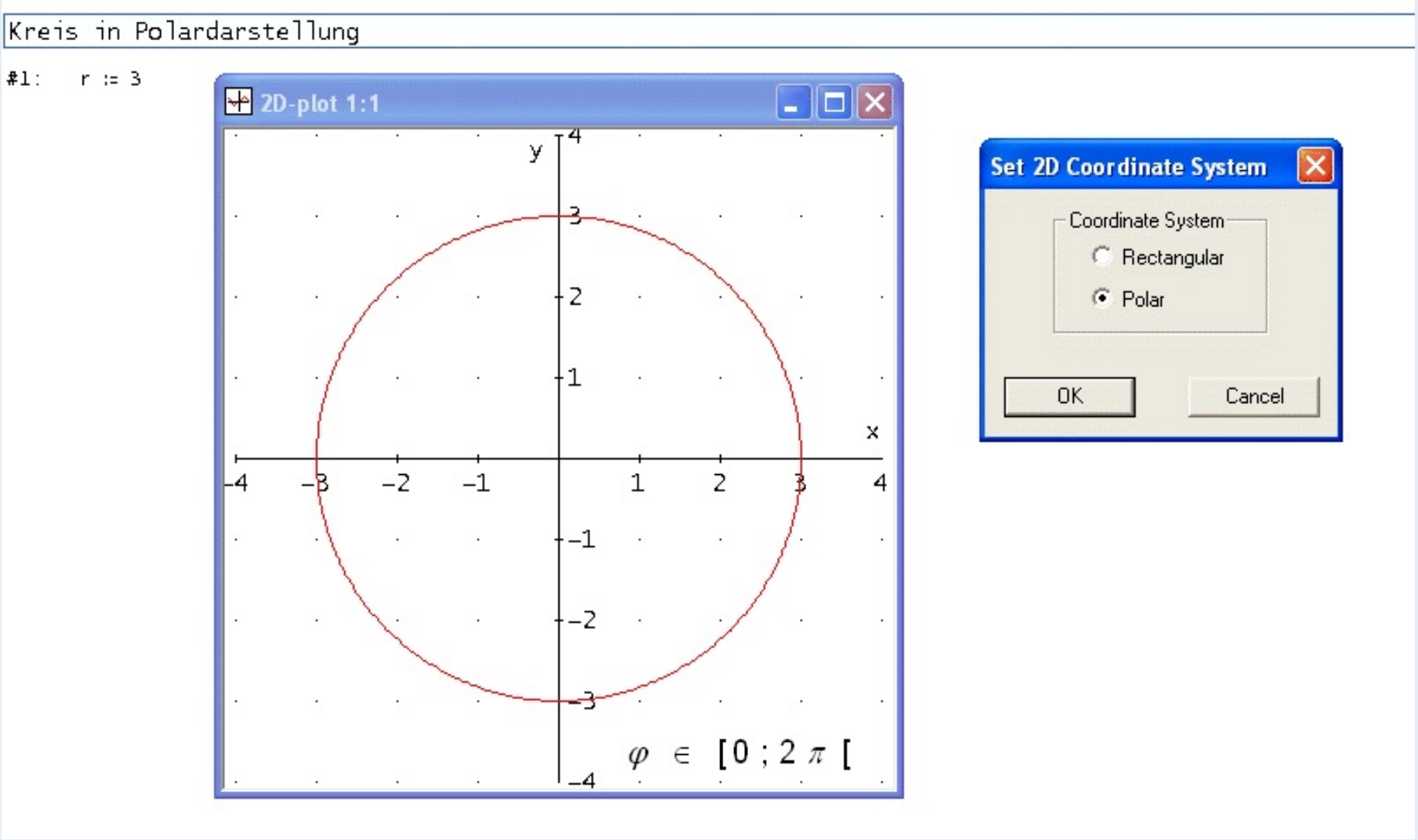
Kenntnisse/Wissen:

- Kreisgleichung in Parameterform kennen.
- Bedeutung des Parameters erklären können (z.B. als Zeit).
- Zusammenhang zwischen Parameterintervall und Bogenlänge angeben können.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

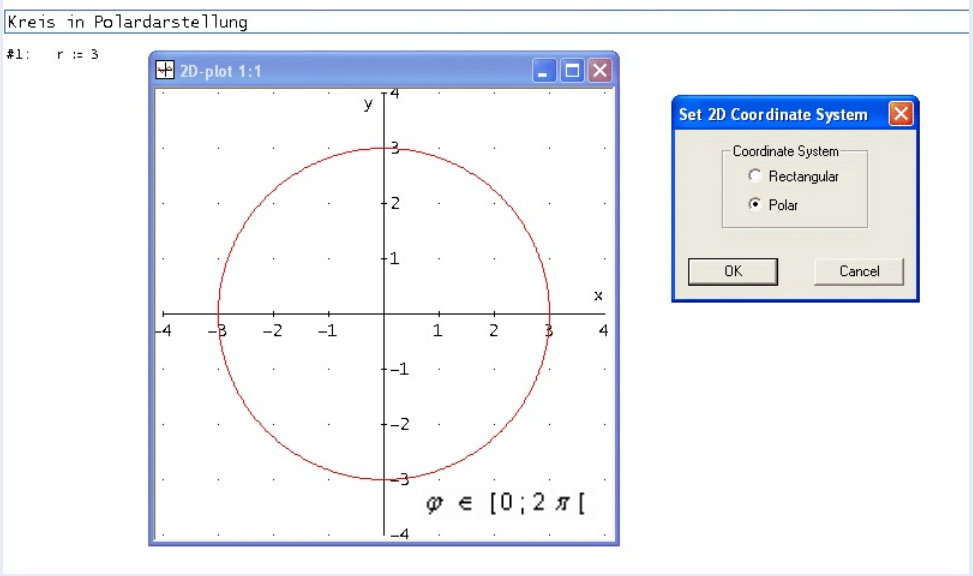
- Kreisgleichung in Paramterform anschreiben können.
- Aus Parameterform Koordinatengleichungen angeben können.

Beispiel: Der „polare" Kreis



Kreis in Polardarstellung mit dem CAS Derive geplottet.

Beispiel: Der „polare" Kreis



Kenntnisse/Wissen:

- Bedeutung des Koordinatensystem für die Darstellung erkennen.
- Polardarstellung eines Kreises kennen.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

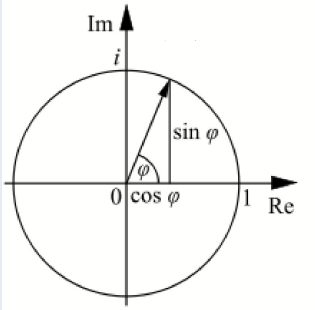
- Zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten umrechnen können.
- Kurve über Radius und Winkel angeben können.
- Koordinatensystem in Graphikwerkzeugen einstellen können.

Beispiel: Der „komplexe" Kreis

$$\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

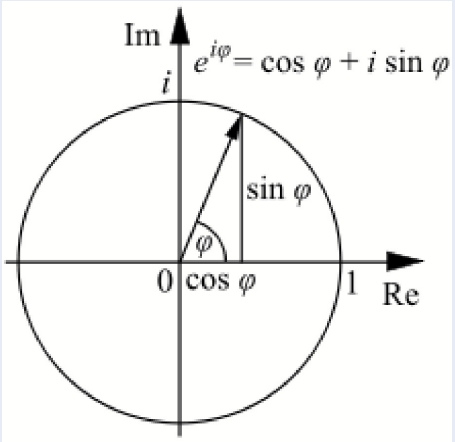
$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$



$$e^{i \cdot x} = \frac{(i \cdot x)^0}{0!} + \frac{(i \cdot x)^1}{1!} + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \frac{(i \cdot x)^4}{4!} + \frac{(i \cdot x)^5}{5!} + \dots$$

$$= \frac{x^0}{0!} + i \cdot \frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$= \left(\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$



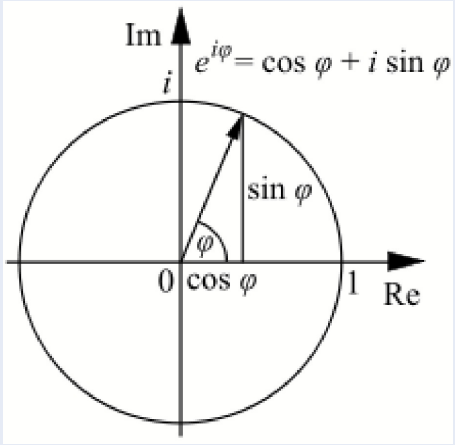
Euler'sche Formel: $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$$e^{i \cdot \pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$z(\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \quad (r \text{ const.}, \varphi \in [0; 2\pi[\,)$$

Beispiel: Der „komplexe" Kreis

$$z(\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \quad (r \text{ const.}, \varphi \in [0;2\pi[\,)$$



Kenntnisse/Wissen:

- Polarform komplexer Zahlen kennen.
- Wissen, wie sich Punkte oder Kurven in der komplexen Ebene darstellen lassen.

Fertigkeiten/Fähigkeiten:

- Aus der Polardarstellung von Kurven die komplexe Darstellung herleiten können.
- Die Bedeutung der Parameter r und φ erklären können.
- Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen mittels Drehstreckungen und Drehstauchungen geometrisch interpretieren können.

Einige Kernpunkte des Grundvorstellungskonzepts
nach R.v.Hofe (1995)

- Ein mathematischer Begriff lässt sich nicht mit *einer* GV, sondern eher mit *mehreren* GVs erfassen ⇨ gegenseitige Vernetzung führt zu Grundverständnis.
- Im Laufe der Schulzeit werden primäre GVs (konkrete Handlungsvorstellungen) durch sekundäre GVs ergänzt. Diese sind Vorstellungen, die durch math. Darstellungsmitteln (wie Diagramme, Graphen, Symbole) repräsentiert werden.
- GVs sind i.A. nicht stabile, für allemal gültige „kognitive Werkzeuge", sondern eher ein System mentaler mathematischer Modelle, das sich durch Erweiterung alter und Gewinn neuer Verstellungen laufend weiterentwickelt.

Die besondere Rolle der Begriffsbildung in der Mathematik

Begriffsbildung

Frey: *Wir werfen über die Erfahrungswelt ein Netz der Begriffe und suchen sie darin zu fangen*. (1967)

Dijkstra: *The introduction of suitable abstractions is our only mental aid to organize and master complexity*. (1982)

Reichel: *Die Begriffsbildung hat für die Mathematik - im Unterschied zu anderen Wissenschaften - eine besondere Bedeutung..... Während in anderen Bereichen Begriffe zur möglichst korrekten Beschreibung der dort zentralen Ideen dienen, entstehen die Gegenstände der Mathematik erst durch die Begriffsbildung*. (1989)

Fischer: *Durch die Materialisierung des Begriffs in Form eines Symbols oder in Form einer speziellen Struktur wird es möglich mit Abstraktem zu operieren, es umzugestalten und aktiv zur Problemlösung einzusetzen*. (1996)

Wie kann man Aspekte eines Begriffs beschreiben ?

Begriffsbildung

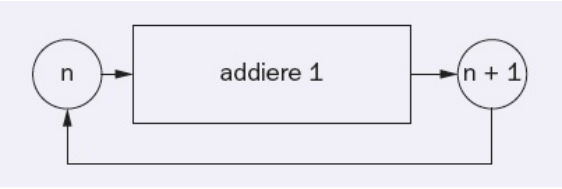
Wer sich ein Thema aussucht, wie »Begriffsbildung und Wissenserwerb«, muss irgendwie verrückt sein. Das Thema ist ähnlich schwierig wie das Thema »Was ist Liebe?« “ (Edelmann ,1996)

Stufen des Begriffsverständnisses

Vollrath, 1984

- IntuitivesBegriffsverständnis
- InhaltlichesBegriffsverständnis
- IntegriertesBegriffsverständnis
- KritischesBegriffsverständnis
- FormalesBegriffsverständnis

- **Intuitives Begriffsverständnis** (Begriff als Phänomen)
  - Begriff als Phänomen in der Umwelt und der Mathematik
  - Wurzeln des Begriffs in der Umwelt des Schülers
  - Welche Bedeutung besitzen Phänomene bei der Genese eines Begriffes?



Beispiel: Iteration

- Die Schülerinnen und Schüler erleben die Iteration als sukzessives Wiederholen eines Musters, einer Gesetzmäßigkeit oder einer Aktion.
- Sie erkennen die Iteration als eine grundlegende Denkweise bei der Längen, Flächen- und Zeitmessung.
- Mit dem Iterationsbegriff sind Vorstellungen vom konstruktiven Aufbau der natürlichen Zahlenreihe verbunden.
- Die Schülerinnen und Schüler verwenden iterative Strategien, wie z.B. das systematische Suchen oder das Programmieren von ‚Schleifen' zum Lösen von Aufgaben.

- **Inhaltliches Begriffsverständnis** (Begriff als Träger von Eigenschaften)
  - Erfassen von Eigenschaften in verschiedenen Darstellungen
  - Lösen von Problemen mit Hilfe von Eigenschaften

- **Beispiel: Iteration**
  - Die Schülerinnen und Schüler kennen Eigenschaften von Iterationsfolgen (Monotonie, Divergenz, Oszillation).
  - Sie erkennen die Konvergenz eines Iterationsverfahrens am schließlich konstanten numerischen Verhalten der Iterationswerte.
  - Sie können einfache Iterationsverfahren und Einschachtelungsverfahren konstruieren und mit Hilfe rekursiv definierter Folgen darstellen.
  - Sie kennen verschiedene Veranschaulichungen von Iterationsfolgen.

- **Integriertes Begriffsverständnis** (Begriff als Teil eines Begriffsnetzes)
  - Erkennen von Zusammenhängen
  - Aufzeigen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden

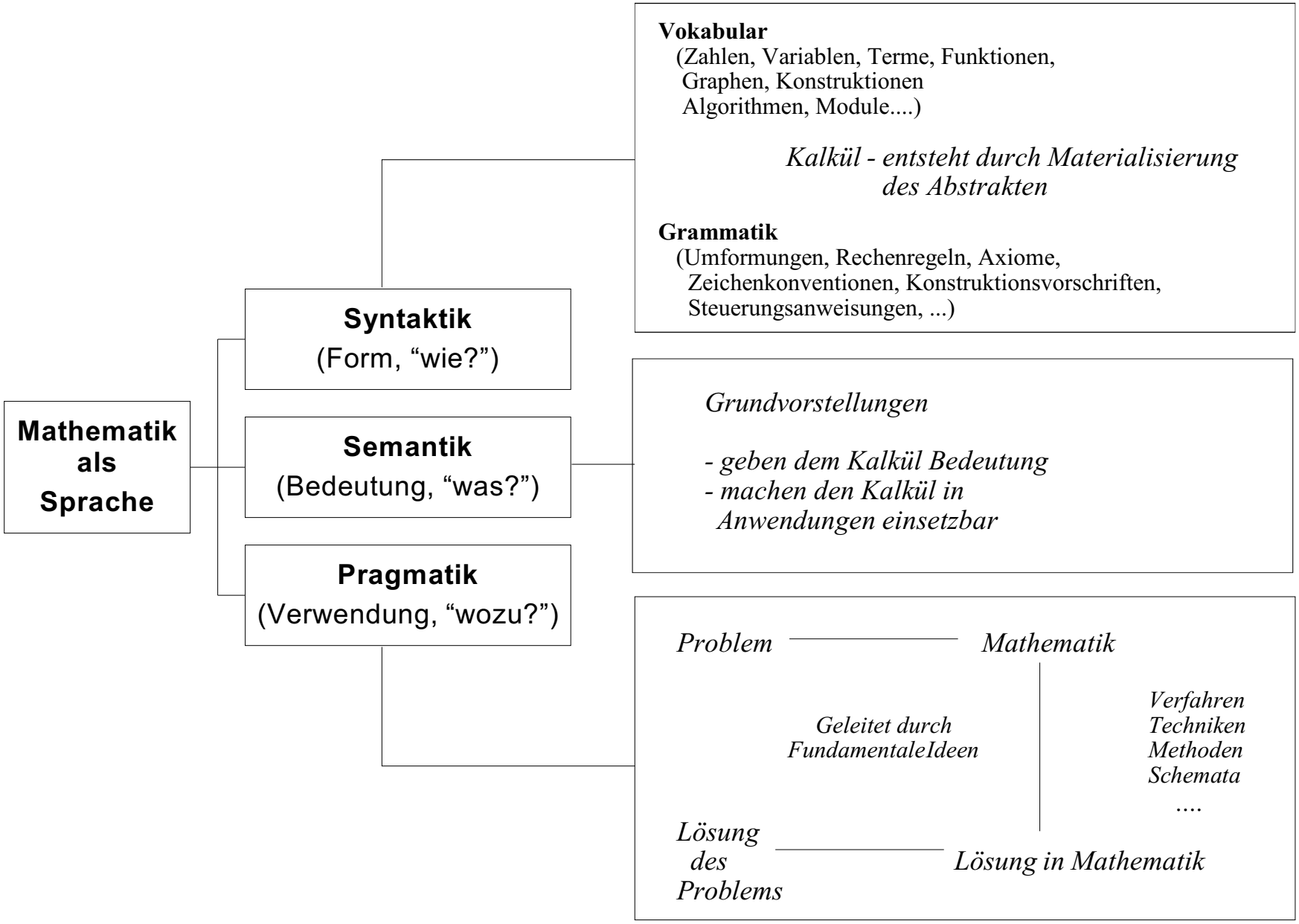
- **Beispiel: Iteration**
  - Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Wechselbeziehung zwischen der Iterationsfunktion, der Iterationsfolge und der Wahl des Startwertes.
  - Sie können Iterationsverfahren zum Lösen von Gleichungen konstruieren und mit Hilfe eines Rechners durchführen.
  - Die Schülerinnen und Schüler können das konvergente Verhalten einer Iterationsfolge mit Hilfe des Grenzwertbegriffs beschreiben.
  - Sie kennen die Iteration als wichtiges Strukturelement eines Algorithmus und unterscheiden zwischen iterativen und rekursiven Prozessen.
  - Sie erfassen diskrete Situationen (etwa Wachstumsprozesse) mit Hilfe von Differenzengleichungen.

- **Formales Begriffsverständnis** (Begriff als formales Objekt)
  - Kenntnis verschiedener Definitionen
  - Anwendung des Begriffs im Rahmen von Beweisen

- **Beispiel: Iteration**
  - Die SchülerInnen können Iterationsverfahren hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeiten beurteilen.
  - Sie können Iterationsverfahren modifizieren und optimieren.
  - Sie können Fehlerabschätzungen bei Iterationsverfahren durchführen.
  - Sie kennen die Bedeutung von Intervallschachtelungen für die Existenz und Eindeutigkeit bei der Zahlenbereichserweiterung

- **Strukturelles Begriffsverständnis** (Begriff als strukturierbares Objekt)
  - Kenntnis wichtiger Verknüpfungen von Funktionen
  - Vorstellung von Verknüpfungen in den entsprechenden Darstellungsformen
  - Begründung von Eigenschaften von Verknüpfungen
  - Kenntnis der Verknüpfungsgebilde von Funktionen
- **Beispiel: Iteration**
  - Die SchülerInnen kennen die Begriffe kontrahierende Abbildung, abstoßender und anziehender Fixpunkt.
  - Sie kennen den Fixpunktsatz und können
  - Konvergenzbeweise für Iterationsverfahren führen.
  - Sie kennen Eigenschaften der Iterierten von Funktionen.
  - Sie können Beweise mit Hilfe der Vollständigen Induktion führen.
  - Sie kennen numerische Lösungsverfahren von Differentialgleichungen und können explizite Lösungen von Differenzengleichungen gewinnen.

Was sind Grundvorstellungen ?


Mathematik als Sprache
Syntaktik
(Form, “wie?”)
Semantik
(Bedeutung, “was?”)
Pragmatik
(Verwendung, “wozu?”)
Vokabular
(Zahlen, Variablen, Terme, Funktionen, Graphen, Konstruktionen Algorithmen, Module....)
Kalkül - entsteht durch Materialisierung des Abstrakten
Grammatik
(Umformungen, Rechenregeln, Axiome, Zeichenkonventionen, Konstruktionsvorschriften, Steuerungsanweisungen, ...)
Grundvorstellungen
- geben dem Kalkül Bedeutung
- machen den Kalkül in Anwendungen einsetzbar
Problem
Mathematik
Geleitet durch FundamentaleIdeen
Verfahren
Techniken
Methoden
Schemata
....
Lösung des Problems
Lösung in Mathematik

Grundvorstellungen ...

- ... wichtige (unverzichtbare) Vorstellungen auf Seiten der / des Lernenden, die Begriff begleiten.
- ... prototypische Konstruktion.
- ... beinhalten “den Kern” eines Begriffes
- ... dienen der Visualisierung
- ... dienen der Entwicklung der Intuition
- ... begleiten bzw. leiten die Ausführung mathematischer Tätigkeiten wie darstellen, interpretieren, operieren, argumentierten, ...
- ... sind Schulstufen-unabhängig.
- ... werden in einem mathematischen Wissensgebiet identifiziert
- ... helfen einen roten Faden durch ein Teilgebeit zu finden / zu behalten
- ... sind meist präformal
- ... lassen sich schwer präzisieren

Ursprünge des Grundvorstellungskonzepts

PESTALOZZI
(1803)
Ausbildung von
„Anschauungen“

HERBART
(1804)
Theorie der
„Anschauungen“

DIESTERWEG
(1835)
„Vorstellungen“
von Mengen und Zahlen

HENTSCHEL
(1845)
„Vorstellungen“
von Verknüpfungen

KÜHNEL
(1916)
umfassendes Vorstellungsmodell
„Stellvertretervorstellungen“ für
Zahlen und Verknüpfungen

WITTMANN
(1929)
Ausbildung von
„Mengenan-
schauungen“

BREIDENBACH
(1947)
Konstruktion von
„Vorstellungs-
grundlagen“

PIAGET
(1947)
Ausbildung von
„Vorstellungen“
und „Verinner-
lichungen“

OEHL
(1965)
„Herauslösen“ und „Wiedererkennen“
mittels
„Grundvorstellungen“

GRIESEL
(1971)
stoffdidaktische Konkretisierung von
„Grundvorstellungen“

ML 78, 1996

- R.v.Hofe (1995)
- G. Malle (1993)

Aspekte bei Grundvorstellungen

Grundvorstellungen ...

- sind stets an bestimmte Darstellungen gebunden;
- sind prototypische Exemplare einer Klasse ähnlicher Objekte;
- sind wichtige, weil allgemeinbildende Vorstellungen, die mit einem mathematischen Inhalt verbunden werden sollen;
- beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und den Phänomenen der individuellen Begriffsbildung;
- spielen eine ganz wesentliche Rolle beim Übersetzen zwischen Realität und Mathematik;
- müssen innerhalb eines mathematischen Teilgebiets (jeden Teilgebiets!) identifiziert werden;
- stellen die Verbindung zwischen mathematischen Inhalten und mathematischen Tätigkeiten her.

(1) Grundvorstellungen ...

sind stets an bestimmte Darstellungen gebunden

- kontextbezogene/verbale Darstellungen
- graphisch/geometrische Darstellungen
- formal/symbolische Darstellungen

Beispiel: Fallgeschwindigkeit

Der zurückgelegte Weg beim freien Fall lässt sich beschreiben durch

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

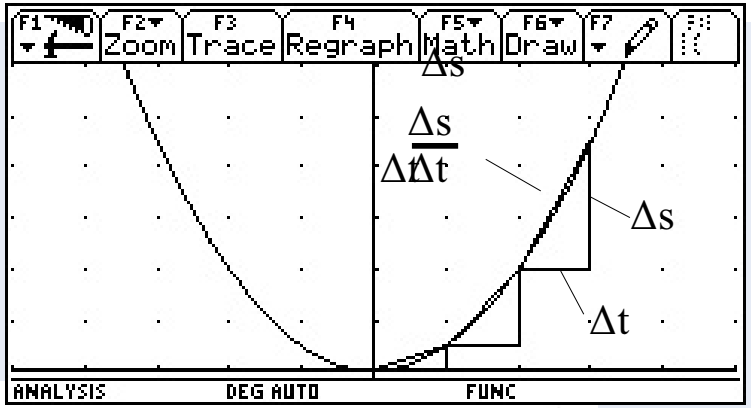
Wenn wir g ≈ 10 m/s² setzen, bekommen wir also $s(t) = 5\,t^2$.

(1) Ermittle die mittlere Geschwindigkeit während der 1., der 2. , der 3., ... der *n*. Sekunde des Fallens.

(2) Gib eine graphische Veranschaulichung der ersten drei Geschwindigkeitswerte an.

(3) Versuche die momentane Geschwindigkeit nach einer Sekunde Fallzeit anzugeben.

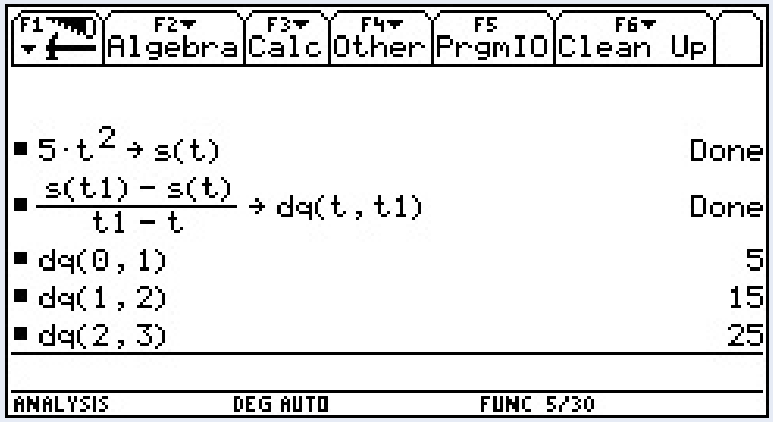
Beispiel: Fallgeschwindigkeit



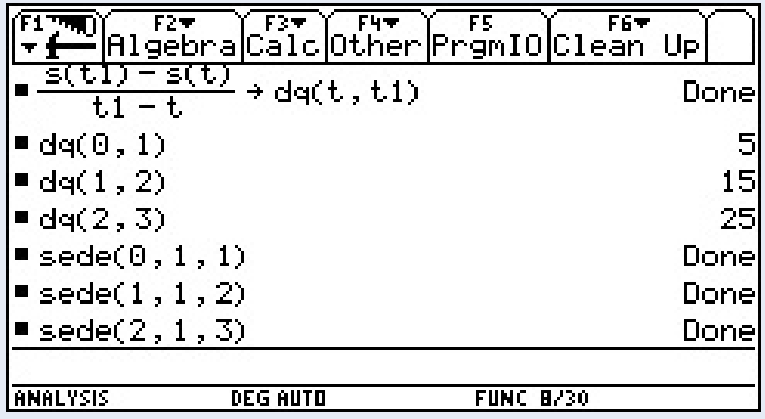
Inhaltliche Beschreibung	*Formale Beschreibung*	*Geometrische Beschreibung*
Wegzunahme (Wegintervall)	$\underbrace{s(t_1) - s(t)}_{\Delta s}$	Länge der Kathete parallel zur Ordinate im Sekanten-Steigungsdreieck
vergangene Zeit (Zeitintervall)	$\underbrace{t_1 - t}_{\Delta t}$	Länge der Kathete parallel zur Abszisse im Sekanten-Steigungsdreieck
mittlere Geschwindigkeit im betrachteten Intervall	$\underbrace{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}}_{\frac{\Delta s}{\Delta t}}$	Steigung der Hypotenuse im Sekanten-Steigungsdreieck

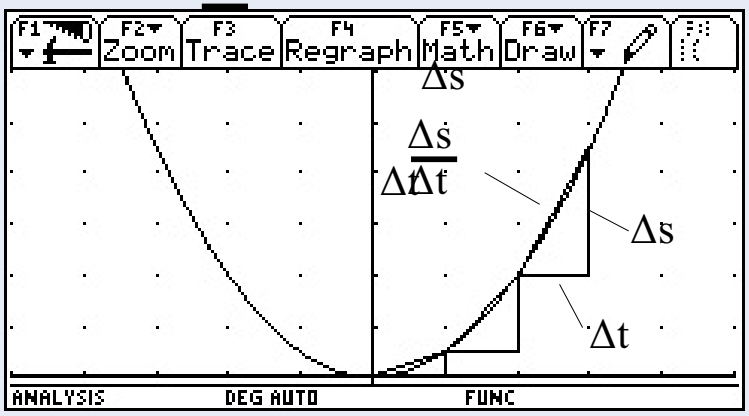
Beispiel: Fallgeschwindigkeit

ad (1)



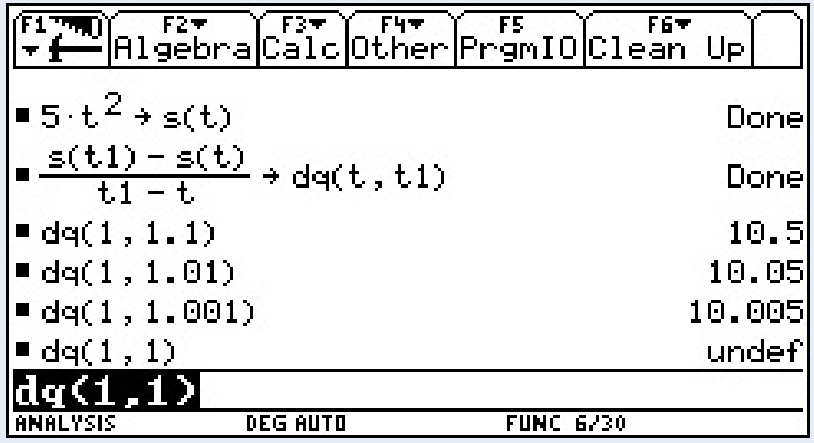
ad (2)





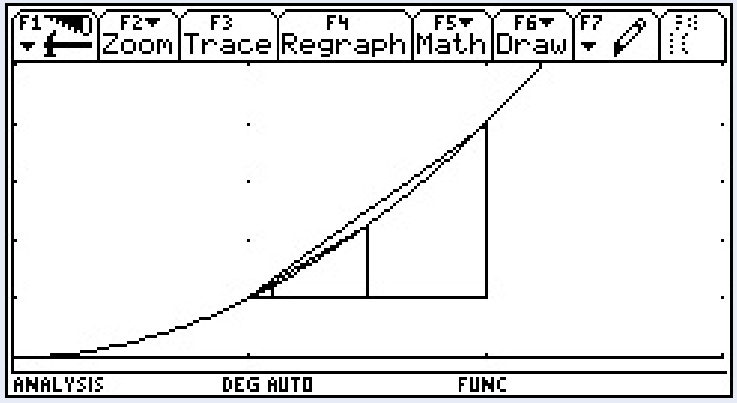
Beispiel: Fallgeschwindigkeit

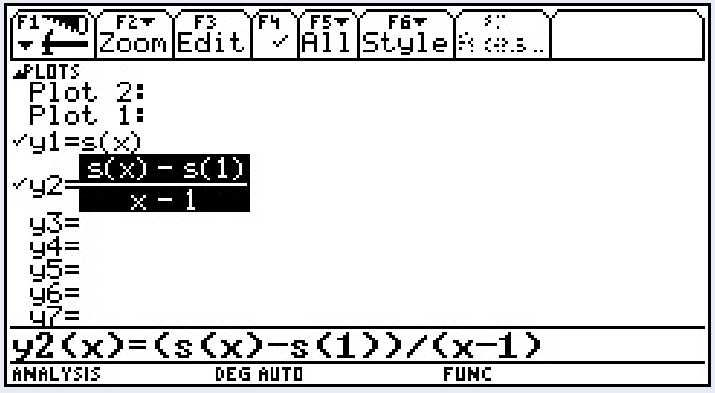
ad (3)

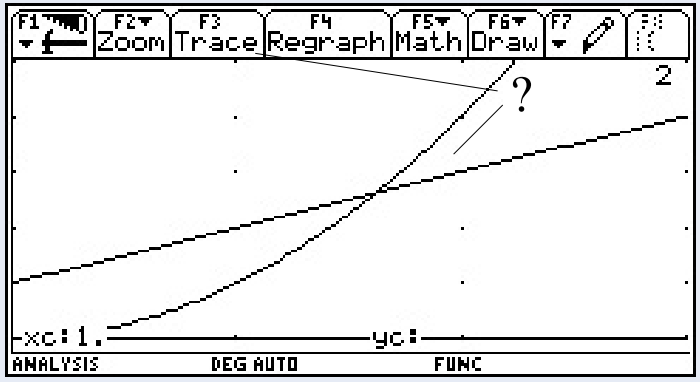


Beispiel: Fallgeschwindigkeit

Von der diskreten Beschreibung zur kontinuierlichen







Beispiel: Fallgeschwindigkeit

1. Näherungsversuch: Ein fauler Trick

$$dq(1,t_1) = \frac{s(t_1) - s(1)}{t_1 - 1} = \frac{5 \cdot t_1^{\,2} - 5 \cdot 1^2}{t_1 - 1} = \frac{5 \cdot (t_1 - 1) \cdot (t_1 + 1)}{t_1 - 1} \overset{??}{=} 5 \cdot (t_1 + 1)$$

$$dq(1,1) = 5 \cdot (1+1) = 10$$

1. Näherungsversuch: Unbegrenzte Näherung

$$\lim_{t_1 \to 1} \frac{s(t_1) - s(1)}{t_1 - 1} = \frac{5 \cdot t_1^{\,2} - 5 \cdot 1^2}{t_1 - 1} = \frac{5 \cdot (t_1 - 1) \cdot (t_1 + 1)}{t_1 - 1} = 5 \cdot (t_1 + 1)$$

Beispiel: Fallgeschwindigkeit

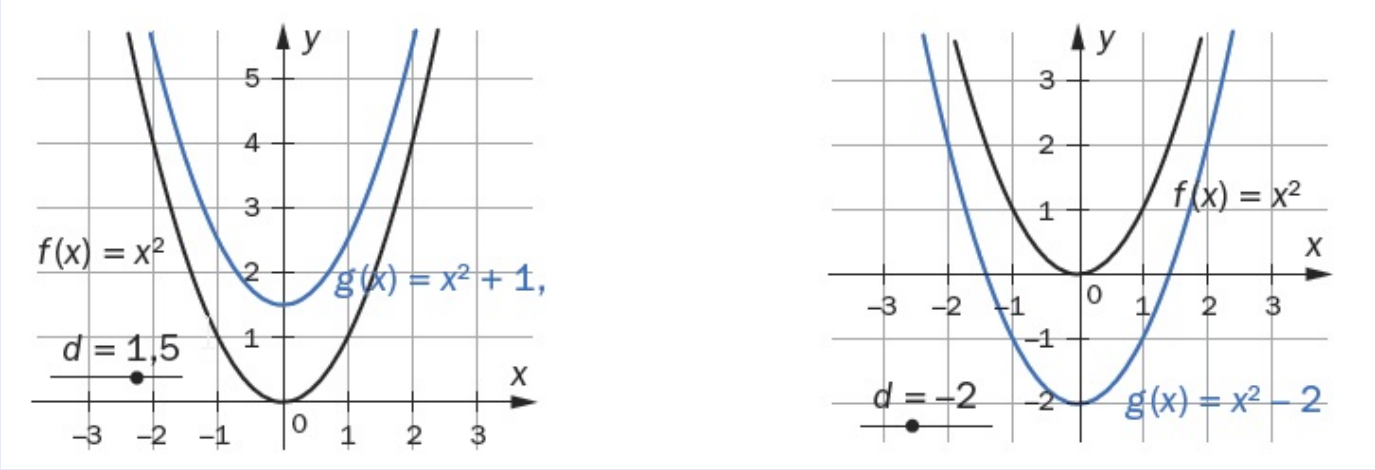
Inhaltliche Beschreibung	*Formale Beschreibung*	*Geometrische Beschreibung*
Man kann nicht für einen Zeitpunkt eine Geschwindigkeit angeben!	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ ist nicht definiert, wenn $t_1 = t$ ist!	Aus dem Sekanten-Steigungsdreieck wird ein Punkt, wenn $t_1 = t$ ist und ein Punkt besitzt keine Steigung
Man kann für ein beliebig kleines Zeitintervall eine Geschwindigkeit angeben! (»Momentan-Geschwindigkeit«)	$\frac{ds}{dt} = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ Da t_1 beliebig nahe an t heranrückt, aber *nie* gleich t wird, ist $\lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$ immer definiert! (Differentialquotient)	Aus dem Sekanten-Steigungsdreieck wird ein unbegrenzt kleines Dreieck.

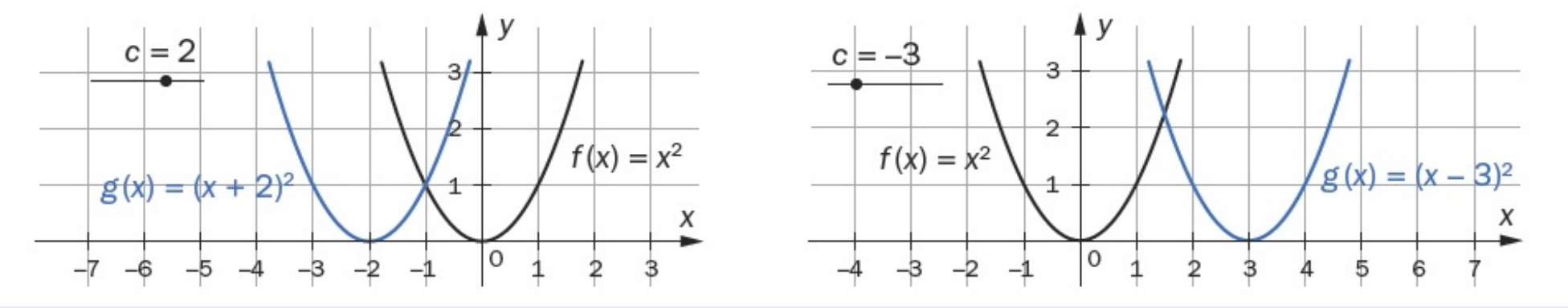
(2) Grundvorstellungen ...

sind prototypische Exemplare einer Klasse ähnlicher Objekte

- beinhalten wesentliche Eigenschaften einer Funktionsklasse
- ermöglichen Transformationen
- ermöglichen Umformungen

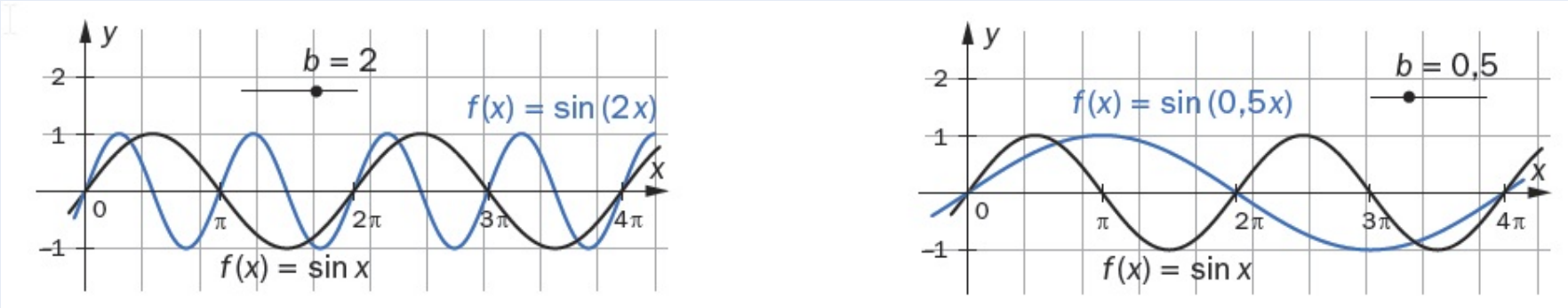
Beispiel: Parametervariation





http://thema-mathematik.at/tmwiki/doku.php?id=tmwiki:parametervariation

Beispiel: Parametervariation



$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$$

Quelle: Thema Mathematik 6, S.155

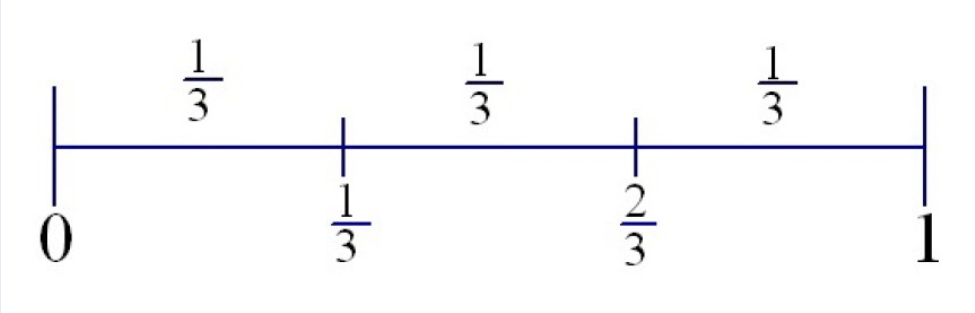
(3) Grundvorstellungen ...

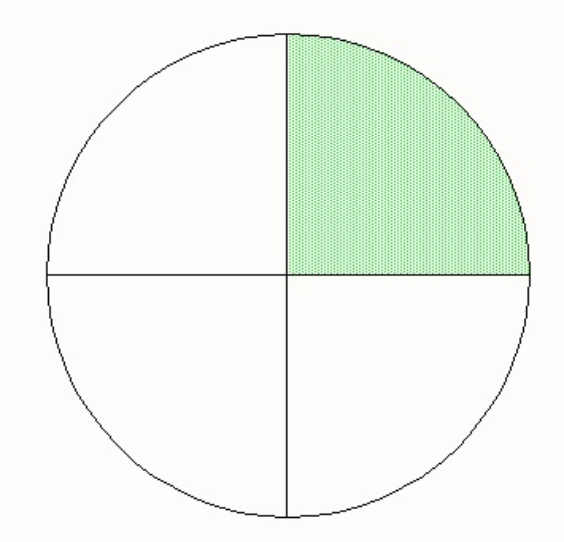
sind wichtige, weil allgemeinbildende Vorstellungen, die mit einem mathematischen Inhalt verbunden werden sollen.

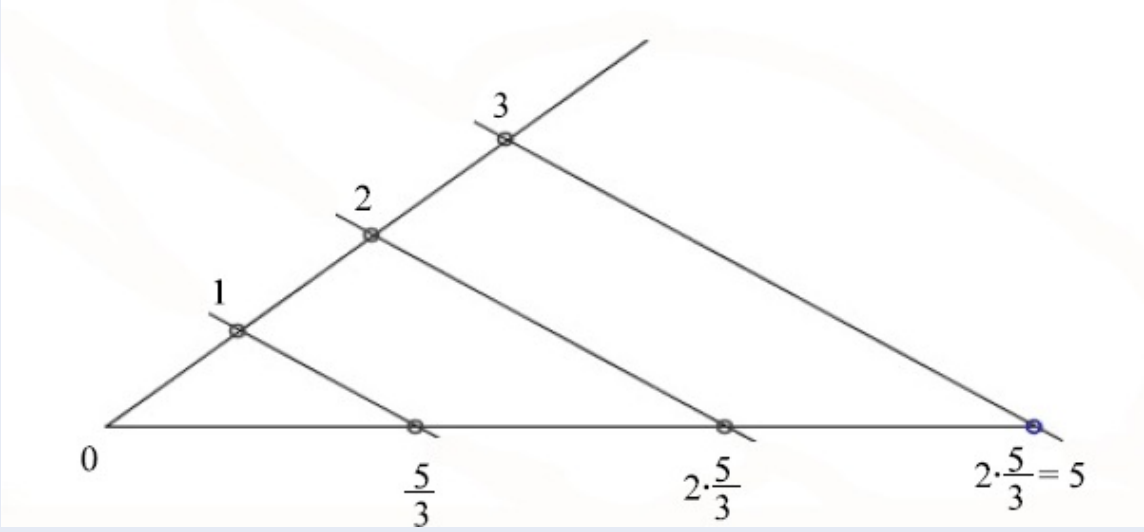
- Bilden die Basis für inhaltliches Denken
- Ermöglichen Operationalisierungen

Beispiel: Was heißt "dividieren"?

GV1: Teilungsvorgang

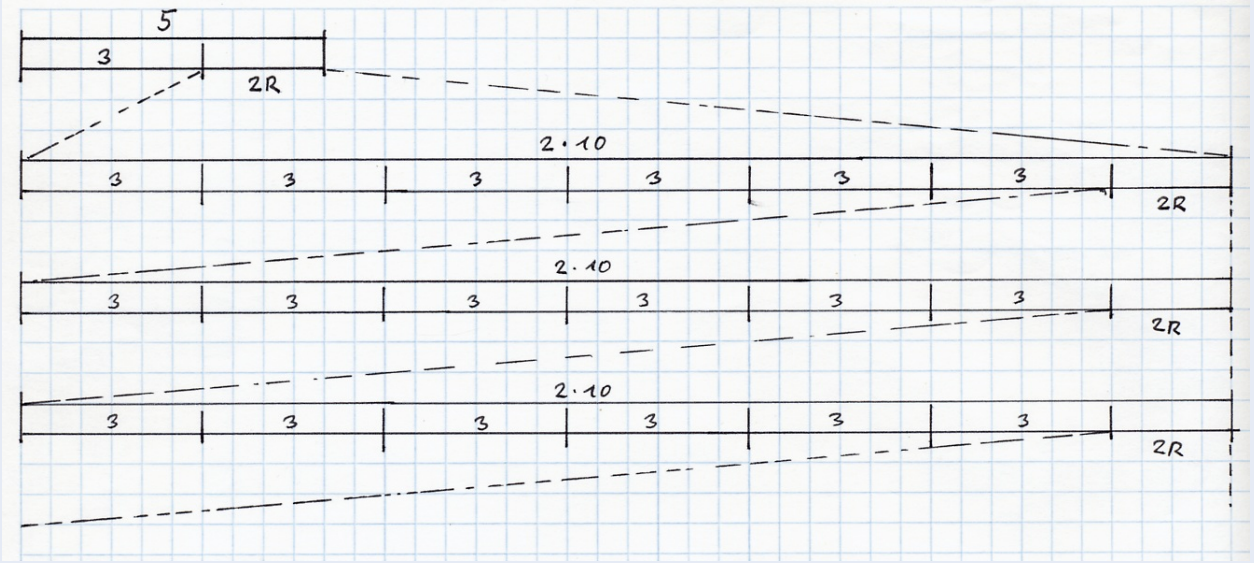






Beispiel: Was heißt „dividieren“ ?

GV2: Messvorgang



	q	r
5 =	1	· 3 + 2
		· 10
20 =	6	· 3 + 2
		· 10
20 =	6	· 3 + 2
		· 10
20 =	6	· 3 + 2
		· 10
	⋮	

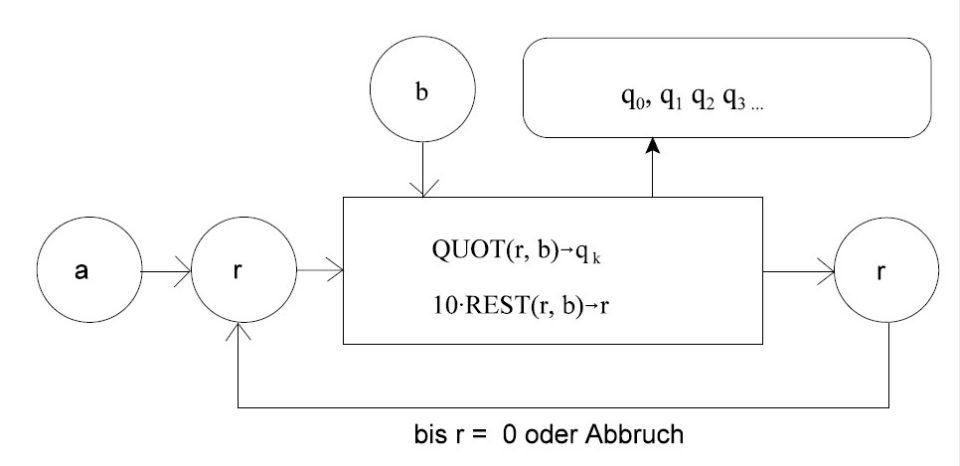
1,666...

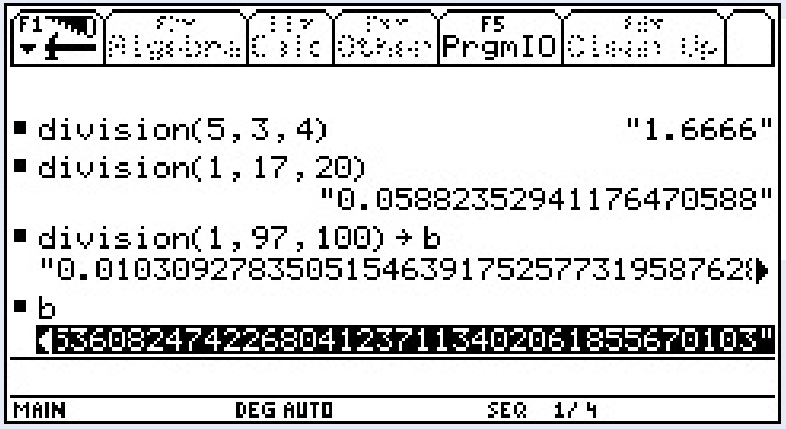
5 : 3 = 1, 6 6 6 ....
20
20
20
.....

Beispiel: Was heißt rational?

GV2: Messvorgang

Der Messvorgang als Algorithmus





DIVISION (a,b)

a → r

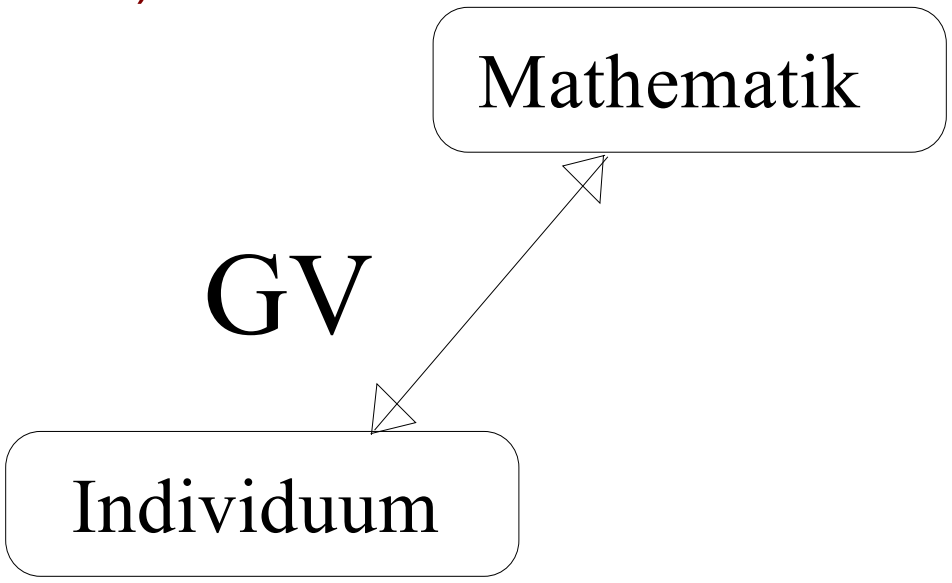
LOOP (bis r=0 oder Abbruch)

QUOT(r,b) → qk

10·REST(r,b) → r

(4) Grundvorstellungen ...

beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und den Phänomenen der individuellen Begriffsbildung (v.HOFE)



Beispiel: Schülerfehler

$$(4x+3y)^2 = 16x^2 + 9y^2$$

freshman's dream

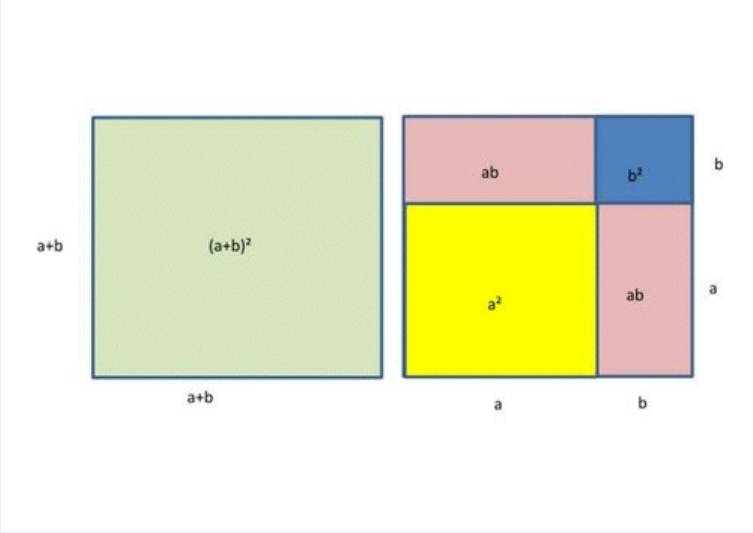
$$(4x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 3y^2$$

GV1:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

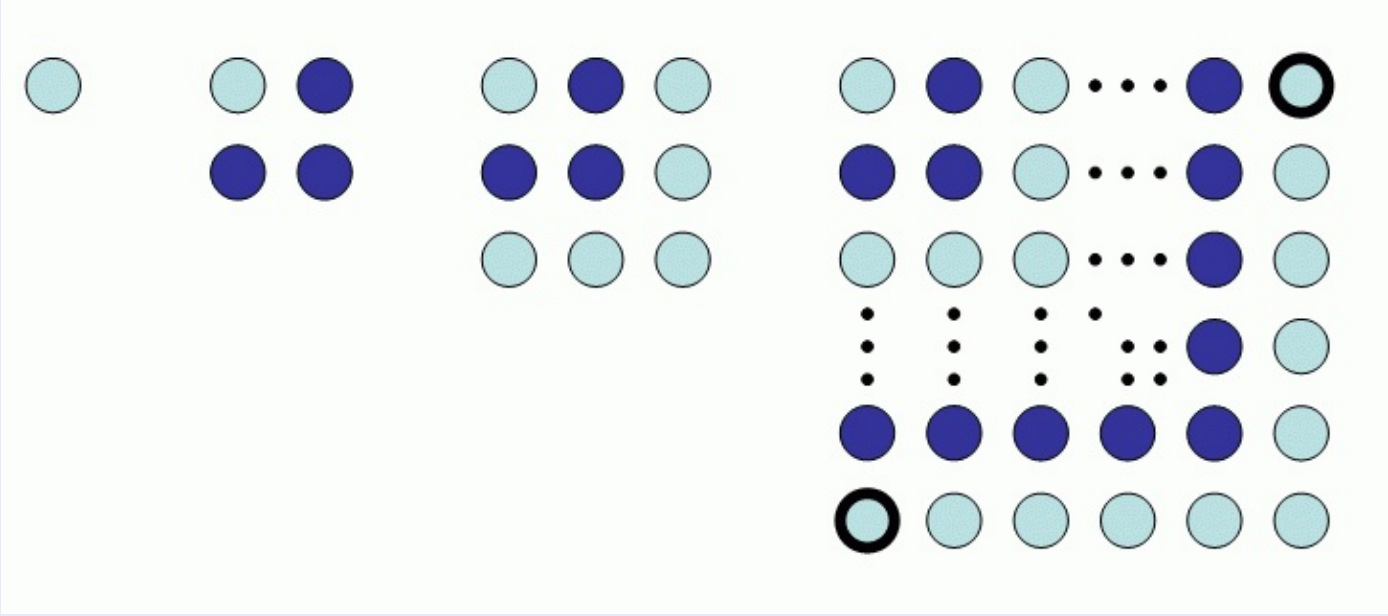
$$(\boxed{4\ x} + \boxed{3\ y})^2$$

GV2:



Beispiel: Unmittelbare Einsichten

$$1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1) = n^2$$



Beispiel: Grundvorstellungen zum Variablenbegriff (Malle 1993)

Für die jeweilige Vorstellung typische Gedankengänge werden anhand von Lösungsüberlegungen zur Gleichung $2(x + 1) = 8$ veranschaulicht:

GV1: Gegenstandsvorstellung

zB x für eine bestimmte Zahl oder Größe

Die gesuchte (bzw. unbekannte) Zahl wird mit x bezeichnet. Es muss gelten: $2(x + 1) = 8$;
da das Doppelte von (x + 1) gleich 8 ist, muss gelten: $x + 1 - 4$, also $x = 3$.

GV2: Einsetzungs-Vorstellung

zB x als Platzhalter für gewisse Zahlen und Größen

x ist Leerstelle bzw. Platzhalter der Aussageform $2(x + 1) = 8$. Gesucht ist die Zahl, welche die Aussageform durch Einsetzten in die Leerstelle in eine wahre Aussage überführt.
Sie kann durch Probieren oder durch Äquivalenzumformungen ermittelt werden, wir erhalten $x = 3$.

GV3: Kalkül-Vorstellung

zB x als Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden kann

Die gesuchte Zahl x muss der Gleichung $2(x + 1) = 8$ genügen. Durch Anwenden der Rechenregeln und der Regeln für Äquivalenzumformungen ergibt sichx = 3.

Beispiel1: Multiplikation von Brüchen

GV1: Abgekürzte Addtion

$$n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}}_{n\,mal}$$

zB $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$

GV2: Von-Deutung

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \text{ von } n$$

zB $\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{2}{5} \text{ von } 3$

Beispiel: Multiplikation von Brüchen

Susanne trinkt jeden Tag einen 1/4 Liter grünen Tee. Wie viel trinkt sie in einer Woche?

$$7 \cdot \frac{1}{4} = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4}}_{7}$$

GV1: Abgekürzte Addtion

$$n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}}_{n\,mal}$$

zB

$$3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$$

Beispiel: Multiplikation von Brüchen

Wie viel sind 2/3 von 6?

$$\frac{2}{3} \text{ von } 6$$

$$\frac{2}{3} \cdot 6 = (2:3) \cdot 6$$

GV2: Von-Deutung

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \text{ von } n$$

vgl. „7 von 30 SchülerInnen werden mit »Sehr gut« benotet.

$$x\% \text{ von } 30 \text{ sind } 7$$

$$\frac{x}{100} \text{ von } 30 = 7$$

$$\frac{x}{100} \cdot 30 = 7$$

Beispiel: Prozentrechnung

GV: p% von G sind A

1 In unserer Schule erreichten 56% von 750 Schülerinnen und Schülern mehr als 60 Punkte beim Känguru-Wettbewerb. Wie viele Schülerinnen und Schüler waren das?

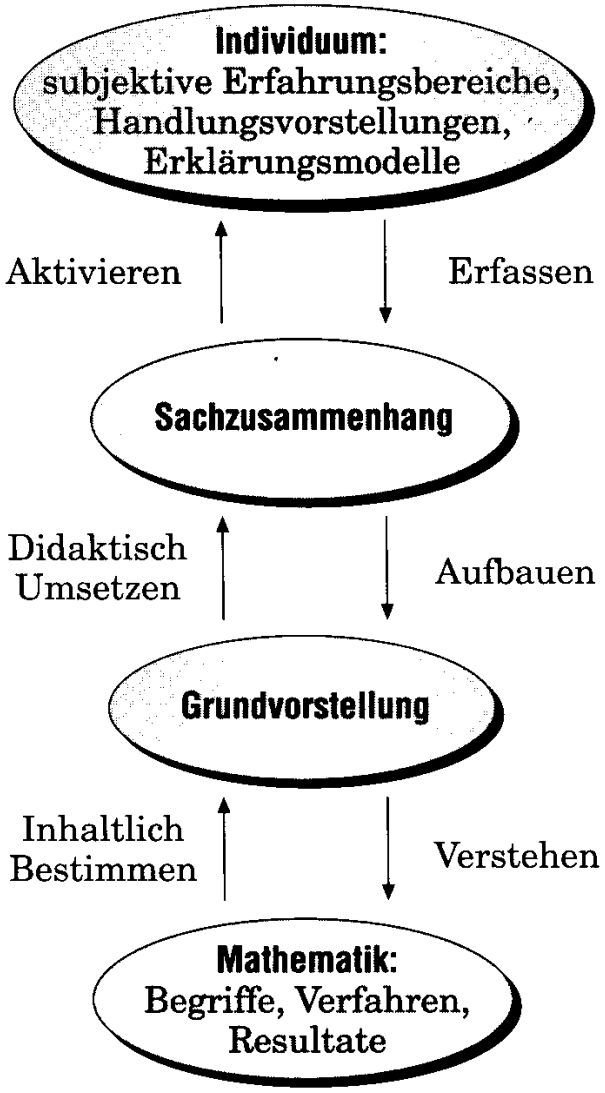
Lösung: x% von y sind z
56% von 750 = z
56 / 100 · 750 = z
z = 420

2 Von 600 getesteten Maturanten waren 288 beim Testlauf für die neue Zentralmatura erfolgreich. Wie viel Prozent sind dies?
Lösung: x% von y sind z
x% von 600 sind 288
x/100· 600 = 288
x = 48 (%)

3 Beim letzten Schikurs waren 18 Schülerinnen und Schüler, das sind 15%, als Anfänger dabei. Wie viele Schülerinnen und Schüler waren auf Schikurs mit?

Lösung: x% von y sind z
15% von y sind 18
15/100· y = 18
y = 120

- „Die Schülervorstellungen geben Aufschluss über die individuellen Erklärungsmodelle des Schülers, die in das System seiner subjektiven Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar sind.“ (v.Hofe 1996)



Beispiel: Grundvorstellungen zum exponetiellen Wachstum

Mathematik
Begriff der exponentiellen Zunahme
$y_{n+1}=y_n+y_n\cdot(p/100)$

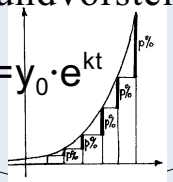
verstehen

inhaltlich bestimmen

aufbauen

Grundvorstellung

$y(t)=y_0\cdot e^{kt}$



Sachzusammenhang
Reiskörner am Schachbrett
Wachstum von Bakterien
Keime in der Kuhmilch
Zinseszinsen

deuten in, didaktisch umsetzen

erfassen

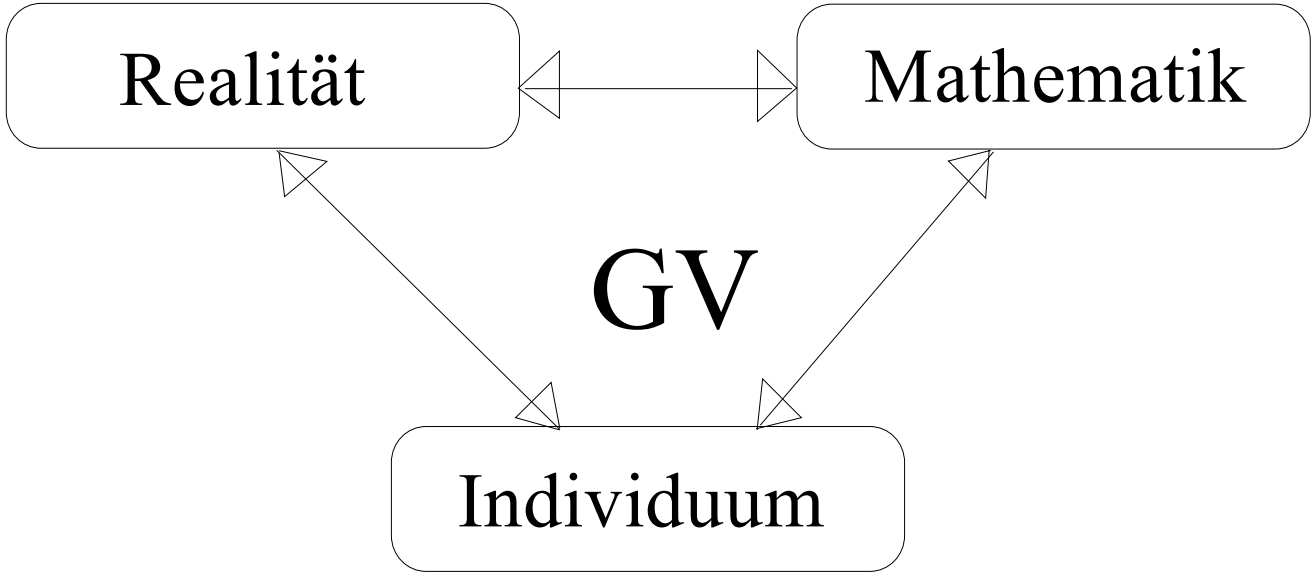
aktivieren

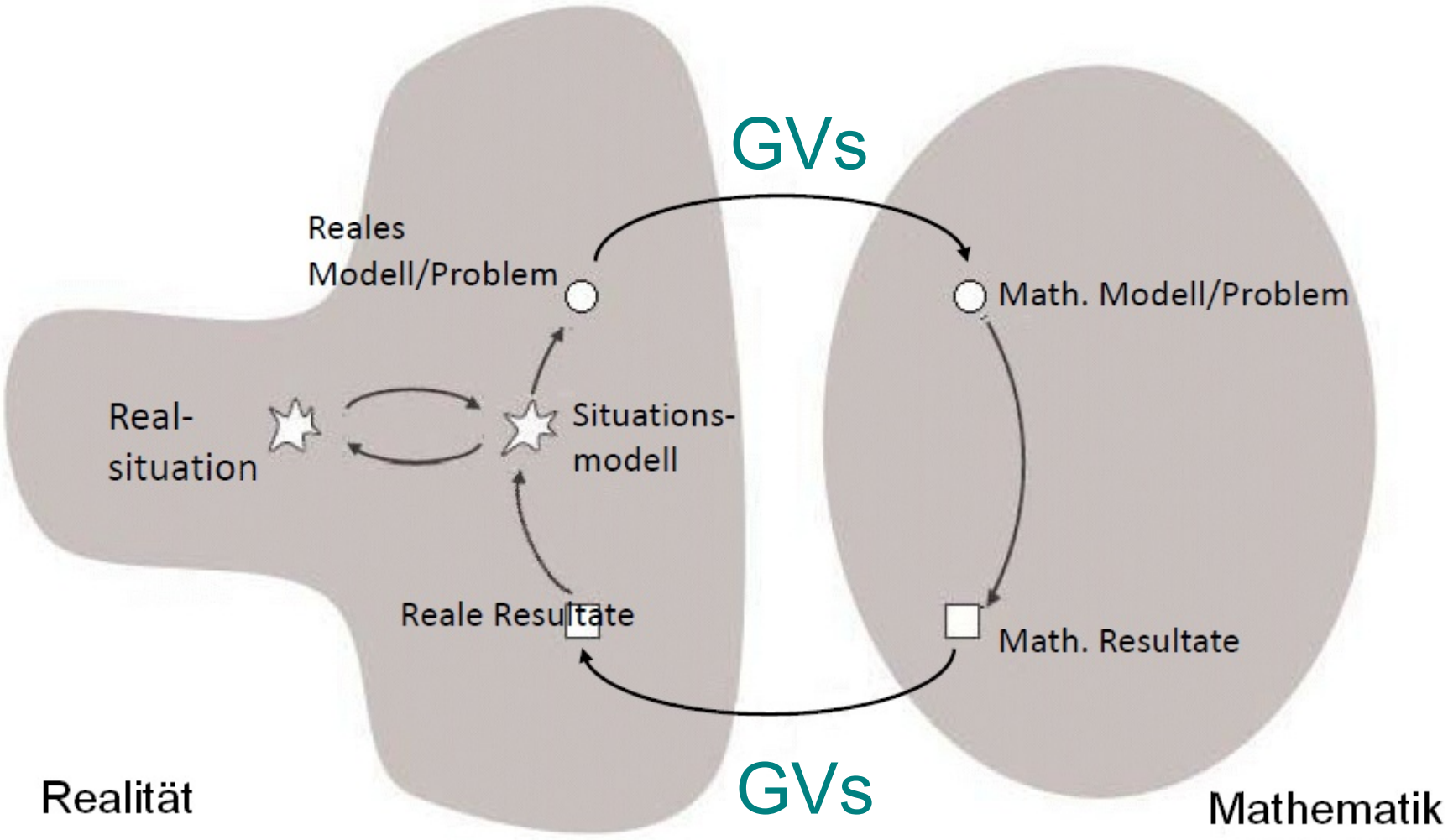
Mensch, Individuum
subj. Erfahrungsbereiche
mentale Strukturen
Handlungsvorstellungen
internal images

(5) Grundvorstellungen ...

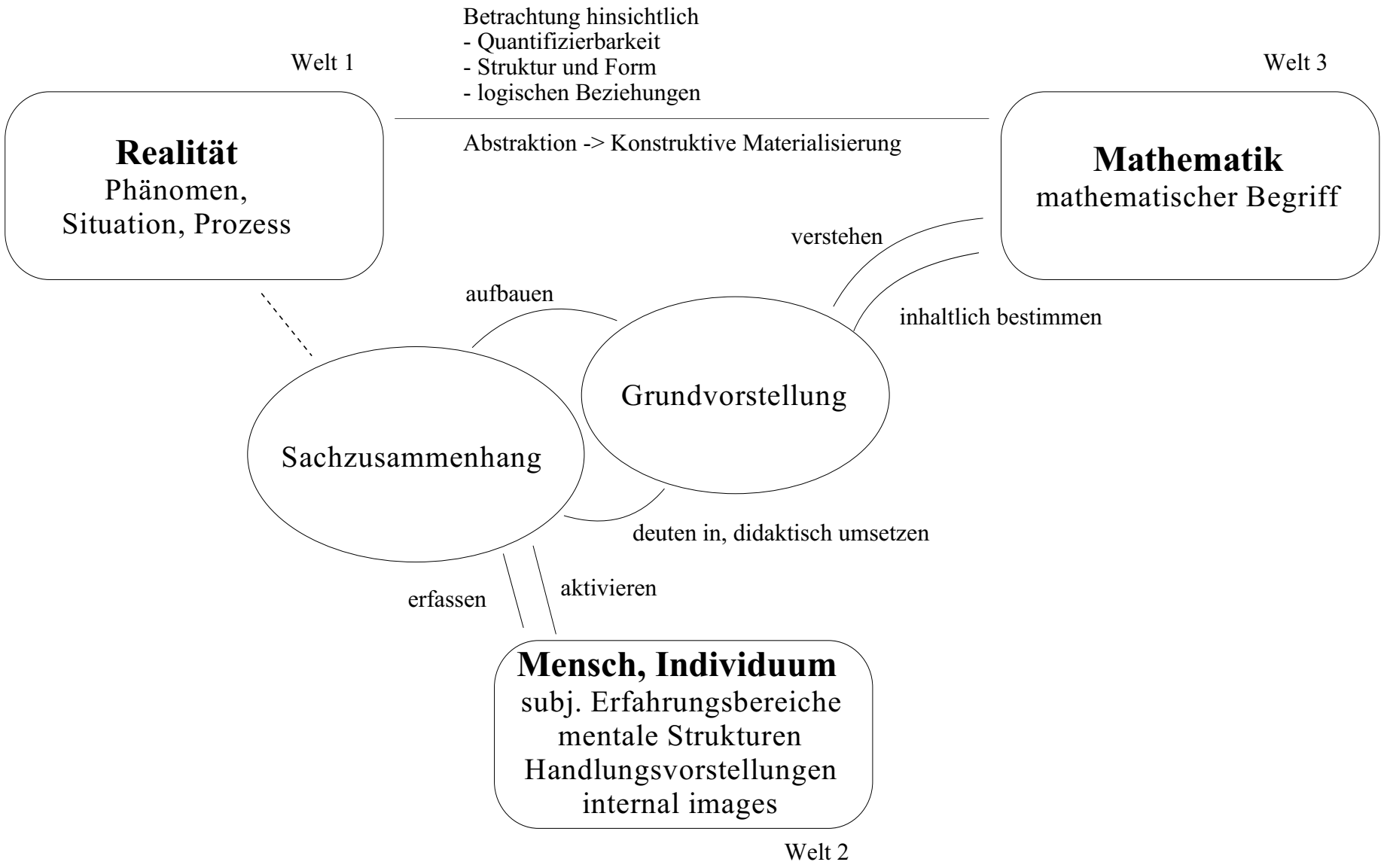
spielen eine ganz wesentliche Rolle beim Übersetzen zwischen Realität und Mathematik.

- „Wenn man Verstehen als Prozess des Erfassens von Bedeutung ansieht (...), sind Grundvorstellungen sogar unabdingbar für wirkliches Verstehen. Dem Aufbau adäquater Grundvorstellungen kommt daher in einem verstehensorientierten und realitätsbezogenen Mathematikunterricht eine überragende Bedeutung zu“ (BLUM u. WIEGAND 1998, S. 30). Sie gestatten ein Hin- und Hergleiten zwischen Mathematik und Realität.
- „Grundvorstellungen machen Mathematik anwendbar“. (MALLE 1999, S. 67).


Realität
Mathematik
GV
Individuum


GVs
Reales
Modell/Problem
Math. Modell/Problem
Real-
situation
Situations-
modell
Reale Resultate
Math. Resultate
Realität
GVs
Mathematik

Blum, 2005


Betrachtung hinsichtlich
- Quantifizierbarkeit
- Struktur und Form
- logischen Beziehungen
Welt 1
Welt 3
Realität
Phänomen,
Situation, Prozess
Abstraktion -> Konstruktive Materialisierung
Mathematik
mathematischer Begriff
verstehen
aufbauen
inhaltlich bestimmen
Grundvorstellung
Sachzusammenhang
deuten in, didaktisch umsetzen
erfassen
aktivieren
Mensch, Individuum
subj. Erfahrungsbereiche
mentale Strukturen
Handlungsvorstellungen
internal images
Welt 2

Beispiel: Grundvorstellungen zum exponentiellen Wachstum

Welt 1

Realität
Phänomen des unbegrenzten Wachstums

Betrachtung hinsichtlich
- Quantifizierbarkeit
- Struktur und Form
- logischen Beziehungen

Abstraktion -> Konstruktive Materialisierung

Welt 3

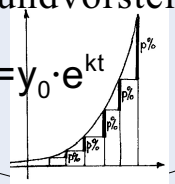
Mathematik
Begriff der exponentiellen Zunahme
$y_{n+1}=y_n+y_n\cdot(p/100)$

verstehen

inhaltlich bestimmen

aufbauen

Grundvorstellung
$y(t)=y_0\cdot e^{kt}$



Sachzusammenhang
Reiskörner am Schachbrett
Wachstum von Bakterien
Keime in der Kuhmilch
Zinseszinsen

deuten in, didaktisch umsetzen

erfassen

aktivieren

Mensch, Individuum
subj. Erfahrungsbereiche
mentale Strukturen
Handlungsvorstellungen
internal images

Welt 2

(6) Grundvorstellungen ...

müssen innerhalb eines mathematischen Teilgebiets (jeden Teilgebiets!) *identifiziert* werden.

- Erst die intensive Beschäftigung und Durchdringung eines Teilgebiets ermöglicht es, derartige Grundvorstellungen zu indentifizieren.
- Ein systematischer Katalog von Grundvorstellungen und eine Diskussion darüber wäre für alle Teilgebiete der Schulmathematik wünschenswert.

Beispiel: Grundvorstellungen zur Addition (Kirsch 1987, Griesel 1971)

GV1: Vereinigungs-Vorstellung

zB „Eva hat 7 Spielfiguren, Jakob hat 5 Spielfiguren. Wie viele haben beide zusammen" (Zwei Zustände werden zu einem neuen Zustand zusammengefasst: Z-Z-Z)

GV2: Hinzufüge-Vorstellung

zB „Eva hat 7 Spielfiguren, sie bekommt 5 dazu. Wie viele hat sie insgesammt?" (Ein Zustand wird geändert mit dem Ergebnis eines neuen Zustands: Z-Ä-Z)

GV3: Veränderung-Vorstellung

zB „Eva bekommt zu ihren Spielfiguren zunächst 7, dann noch 5 weitere hinzu. Wie viele hat sie insgesamt hinzubekommen"

(Zwei Änderungen werden zusammengefasst zu einer Gesamtänderung: Ä-Ä-Ä)

Beispiel: Grundvorstellungen zur Subtraktion

GV1: Wegnehm-Vorstellung

zB „5 von 8 Blumen werden weggenommen, wie viele bleiben übrig?"

GV2: Vergleichs-Vorstellung

zB „Ich habe 5 Blumen, du 8; wie viele Blumen hast du mehr als ich?"

GV3: Ergänzungs-Vorstellung

zB „Ich habe 5 Blumen und will insgesamt 8 Blumen haben; wie viele muss ich hinzubekommen?"

GV4: Vereinigungs-Vorstellung

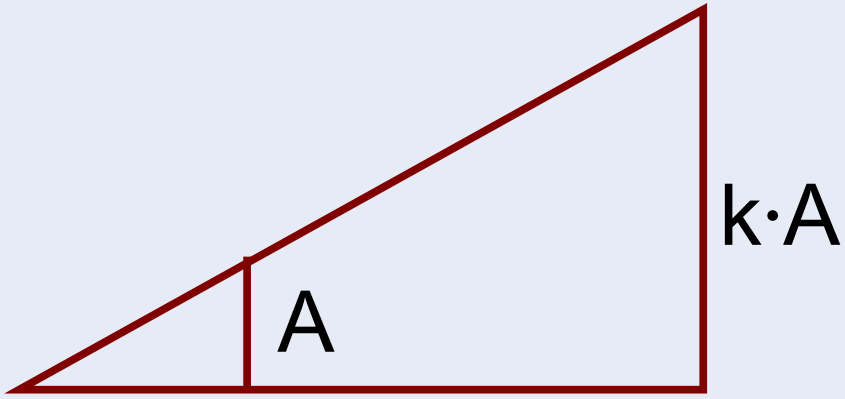
zB „Ich habe insgesamt 8 Blumen, nämlich 5 Tulpen und noch ein paar Narzissen; wie viele Narzissen habe ich?"

Beispiel: Grundvorstellungen zur Multiplikation

GV1: Fortgesetzte Addtion

zB „Eva hat 7 Spielfiguren, Jakob hat 5 Spielfiguren. Wie viele haben beide zusammen" (Zwei Zustände werden zu einem neuen Zustand zusammengefasst: Z-Z-Z)

GV2: Zoomen



Beispiel: Grundvorstellungen zu Funktionen

GV1: Zuordnungs-Vorstellung

Eine Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet.

GV2: Kovariations- oder Änderungs-Vorstellung

Verändert sich die eine Größe, so verändert sich die zugeordnete Größe in bestimmter Weise.

GV3: Objekt-Vorstellung

Eine Funktion wird als Ganzes, als eigenständiges mathematisches Objekt sui generis betrachtet.

Beispiel: Grundvorstellungen zum Differentialquotienten (Blum, Kirsch 1996)

GV1: Differentialquotient als lokale Änderungsrate

Der Differentialquotient ist der Grenzwert der mittleren Änderungsraten von Größen an der betreffenden Stelle.

GV2: Differentialquotient als Steigung

Der Differentialquotient beschreibt die Steigung des Funktionsgraphen an der betreffenden Stelle.

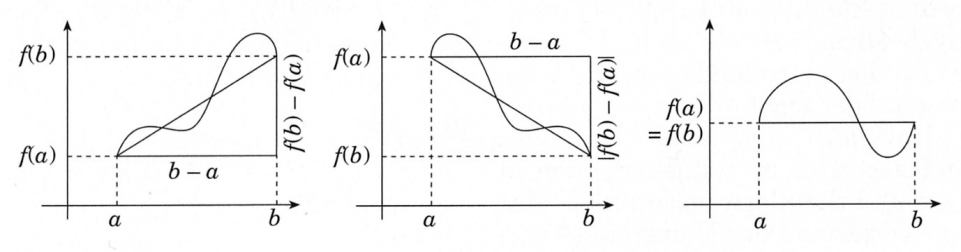
Bedeutet f(x) –	dann bedeutet $\frac{df(x)}{dx}$ –
– die **Ordinate** des Punktes (auf einer geeigneten* Kurve) mit der Abszisse x	– die **Steigung** der Kurve in diesem Punkt
– den vom Start bis zum Zeitpunkt x zurückgelegten **Weg**	– die **Geschwindigkeit** zu diesem Zeitpunkt
– die **Einkommensteuer** beim zu versteuernden Einkommen x	– den **Grenzsteuersatz** („Steuer für die letzte Mark") bei diesem Einkommen
– die vom Anfangspunkt bis zur Wegstelle x verrichtete **Arbeit**	– die an dieser Stelle wirkende **Kraft**komponente
– das **Volumen** der Kugel vom Radius x	– den **Oberflächeninhalt** dieser Kugel
– das **Volumen** eines Körpers bis zur Höhe x	– den **Querschnitt** des Körpers in dieser Höhe
– den **Flächeninhalt** unter einer Kurve (oberhalb der ersten Achse) bis zur Stelle x	– die **Ordinate** des Kurvenpunktes mit der Abszisse x (die Höhe der Fläche bei x)
– das **Integral** $\int_a^x g(u)\,du$ einer Funktion g im Intervall [a;x]	– den **Funktionswert** g(x)

* „Geeignet" als Kurven sind die Graphen differenzierbarer Funktionen.

Quelle: Mathematik lehren, 78,S.62

Beispiel: Grundvorstellungen zum Differentialquotienten (Malle 2003)

GV1: Differentialquotient als Änderungsverhältnis



Der Differenzenquotient soll als Verhältnis aufgefasst werden: Die mittlere Änderungsrate ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.

GV2: Differentialquotient als mittlere Änderung pro Einheit

Die mittlere Änderungsrate ist gleich der mittleren Änderung der Funktionswerte pro Argumenteinheit.

GV3: Differentialquotient als Änderungsfaktor

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=m \Rightarrow f(b)-f(a)=m\cdot(b-a)$$

Die mittlere Änderungsrate ist gleich demFaktor, mit dem die Änderung der Argumente multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten.

(7) Grundvorstellungen ...

stellen die Verbindung zwischen mathematischen Inhalten und mathematischen Tätigkeiten her.

- Hinter jeder Definition, Beschreibung von Eigenschaften eines Begriffs steht eine Grundvorstellung.
- Hinter jeder mathematischen Grundtätigkeit steht eine Grundvorstellung.

Problemlösen

Kenntnisse / Wissen	Begriffe Bausteine Werkzeuge	Fertigkeiten / Fähigkeiten
Mathematische Inhalte Grundwissen	Vorstellungen Grundvorstellungen	Mathematische Tätigkeiten Grundtätigkeiten
• Zahlen • Algebra • Geometrie • Analysis • Stochastik	M als Sprache zur Beschreibung von • Strukturen u. Mustern, • Systemen • Quantifizierbarem, • Reproduzierbarem • logischen Beziehungen, • Zusammenhängen • Ereignissen und Prozessen • Situationen und Zuständen	• Darstellend-interpretierendes Arbeiten • Operativ-algorithmisches Arbeiten • Kritisch-argumentierendes Arbeiten • Heuristisch-experimentelles Arbeiten

Reflektieren, Verstehen

Kommunikationsfähigkeit

Mathematische Inhalte

↕

Bereiche der Inhaltsdimension:

- I1: Algebra und Geometrie
- I2: Funktionale Abhängigkeiten
- I3: Differential- und Integralrechnung
- I4: Wahrscheinlichkeit und Statistik

Mathematische Tätigkeiten

↕

Bereiche der Handlungsdimension:

- H1: Darstellen, Modellbilden
- H2: Rechnen, Operieren
- H3: Interpretieren
- H4: Argumentieren, Begründen

Reflektieren, Verstehen

Das Spektrum de Inhalts- und Handlungsdimensionen im Rahmen der österreichischen Standards und der Zentralmatura

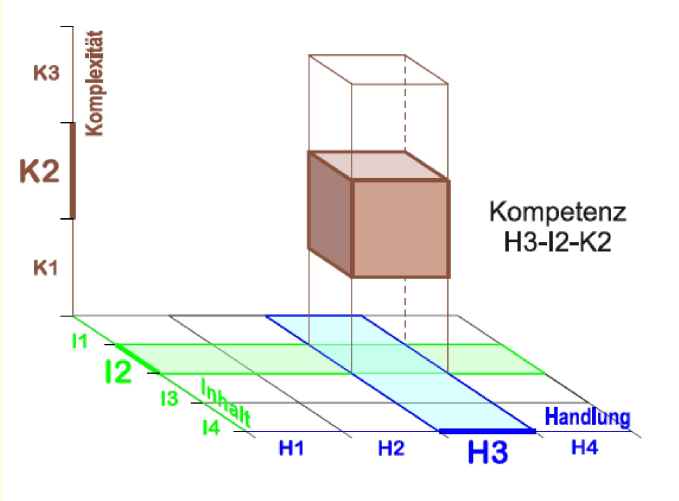
Grundvorstellungen und kompetenzorientierter Mathematikunterricht

Grundvorstellungen

Kompetenz (bei Standards und Zentralmatura)

Eine spezifische **mathematische Kompetenz** wird charakterisiert durch eine bestimmte *Handlung*, die an einem *Inhalt* mit einer bestimmten *Komplexität* ausgeführt wird, also durch ein **Tripel** [z. B. (H3, I2, K2)].

Beispiel: Eine spezifische Kompetenz ist die Fähigkeit zur Interpretation (Handlungsbereich H3) von Inhalten aus der Analysis (Inhaltsbereich I2), wobei mehrere Fakten/Zusammenhänge/ Darstellungen/Handlungen miteinander in Verbindung gebracht werden müssen (Komplexitätsbereich K2).



Handlungsformate

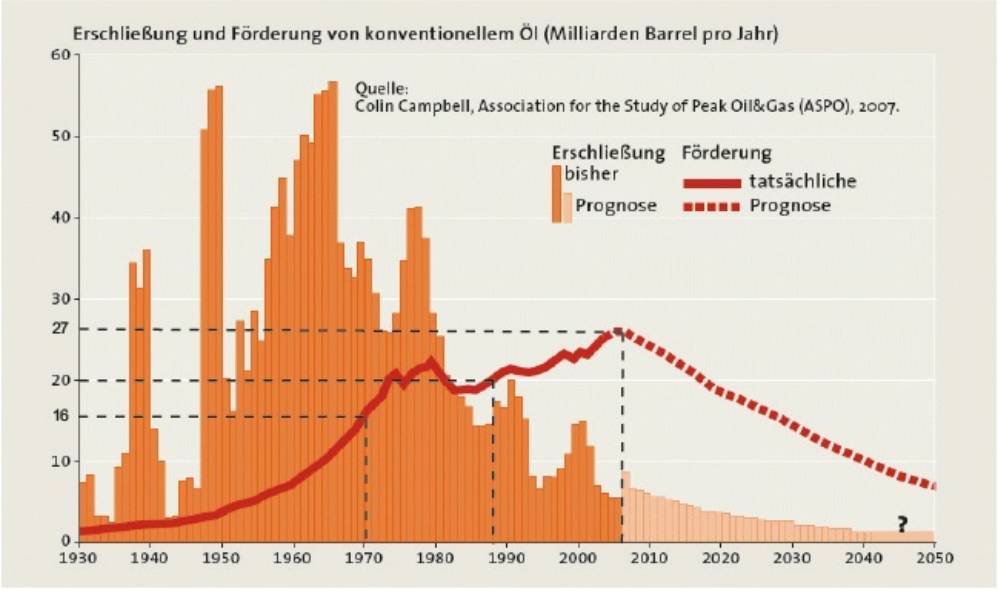
- Darstellung- und Modellieraufgabe
- Rechenaufgaben
- Interpretationsaufgabe
- Begründungs-/Argumentationsaufgabe

Beispiel: Darstellungs-/Modellieraufgaben

Erdöl (Teil-2-Aufgabe)

Erdöl ist einer unserer wichtigsten Energieträger. Die Schätzungen, wie viel Erdöl wir in den nächsten Jahren noch fördern können, variieren sehr stark. Optimistische Schätzungen gehen von einer verfügbaren Restfördermenge von 1 250 Gigabarrel (der Faktor für 1 Giga ist 10^9) Rohöl ab dem Jahr 2010 aus.

Das Diagramm zeigt die Entwicklung der Erdölförderung in den letzten Jahren sowie die Entdeckung von Erdölvorkommen in Gigabarrel (Gbbl) pro Jahr.



Aufgabenstellungen:

a) Begründen Sie, warum ein lineares Wachstumsmodell für den Zeitraum von 1930 bis 1970 nicht geeignet ist. Geben Sie ein passendes Wachstumsmodell an und berechnen Sie mit diesem Modell und unter der Annahme, dass der Anstieg der Fördermenge sich genau so wie von 1930 bis 1970 weiter fortsetzt, wie viel Erdöl im Jahr 1980 gefördert worden wäre.

Quelle: Exemplarische Aufgabenstellungen, Bifie 5.12.11

Beispiel: Darstellungs-/Modellieraufgaben

Tobias sagt zu seinem Freund Markus: „Ich habe gelesen, dass Jod^{131} eine Halbwertszeit von ca. 8 Tagen hat. Habe ich eine Menge von 48 mg Jod^{131}, dann rechne ich damit, dass nach 8 Tagen noch 24 mg Jod^{131} vorhanden sind. Nach 2 Tagen hätte ich also noch 42 mg, nach 10 Tagen 18 mg."

Markus bemerkt dazu: „ Dein Modell stimmt so absolut nicht. Meiner Meinung nach liegen deine Angaben für die Tage bis zur Halbwertszeit zu hoch, danach zu niedrig."

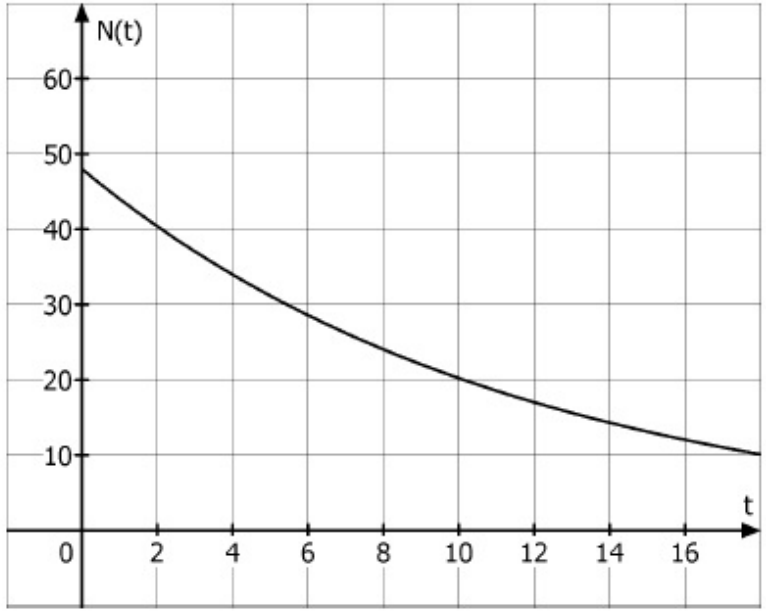
a) Nach welchem Modell rechnet Tobias? Gib dafür eine Formel an.

b) Welches Modell sollte angewendet werden? Gib auch dazu eine Formel an.

Welche Menge ist nach 2 Tagen (nach 10 Tagen) noch vorhanden?

c) Ergänze die vorgegebene Graphik und begründe, dass Markus Recht hat.

Bifie

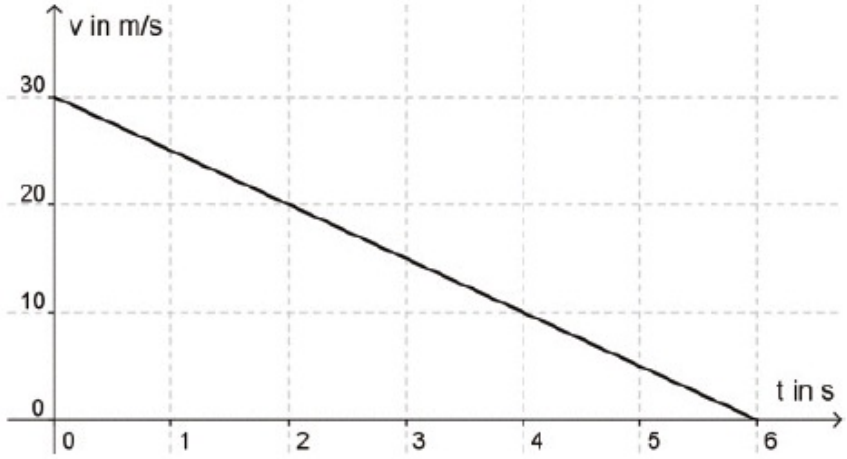


Quelle: Unterrichtsaufgabe 84 SRP Bifie

Beispiel: Rechenaufgaben

Bremsvorgang (Teil-2-Aufgabe)

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von $v = 30\ m/s$ und bremst wegen eines auf der Fahrbahn liegenden Hindernisses ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Bremsvorgang. Die Abbildung zeigt modellhaft das t-v-Diagramm für einen Bremsvorgang.



Quelle: Exemplarische Aufgabenstellungen, Bifie 5.12.11

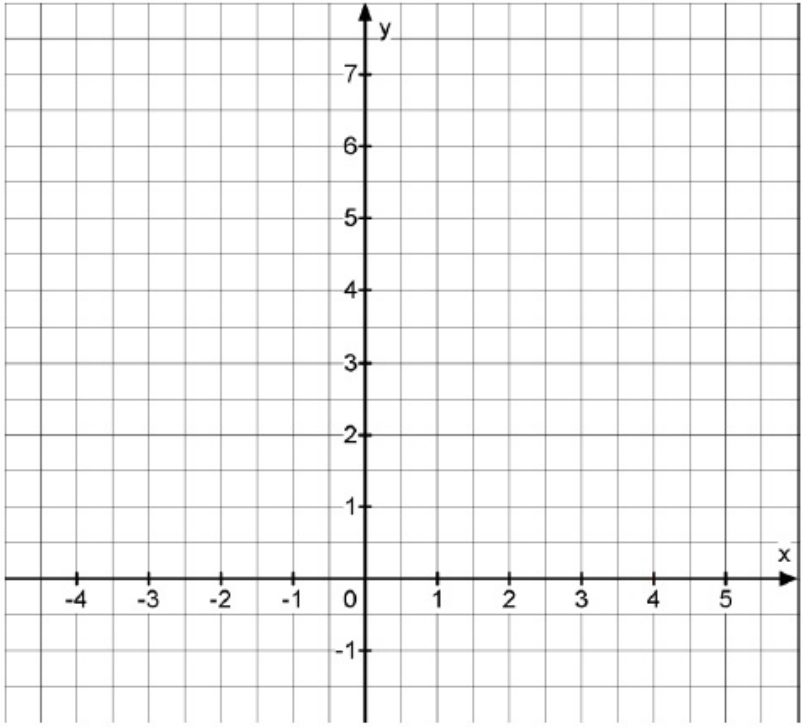
b) Ermitteln Sie die absolute und die relative Abnahme der Geschwindigkeit des PKW während der ersten beiden Sekunden des Bremsvorgangs.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ für den Zeitraum des Bremsvorgangs. Begründen Sie, wie sich eine Änderung der Anfangsgeschwindigkeit auf den Verlauf des Graphen von $v(t)$ auswirkt, und interpretieren Sie deren Bedeutung für den Bremsvorgang.

Beispiel: Rechenaufgaben

Gleichungen kann man auf verschiedene Arten lösen. Dies soll mit der Gleichung $0{,}41^x = 4$ auf folgende Arten erfolgen:

a) Graphische Methode

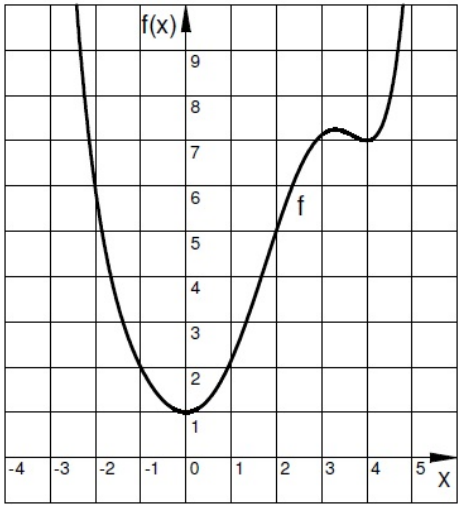


b) Löse die Gleichung rechnerisch.

Quelle: Unterrichtsaufgabe 85 SRP, Bifie

Beispiel: Interpretationsaufgaben

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen für diese Funktion f zutreffend bzw zutreffend sind!

	zutreffend	nicht zutreffe
Der Differenzenquotient im Intervall [0; +2] ist 2.	○	○
Der Differenzenquotient im Intervall [–2; +2] ist positiv.	○	○
Der Differentialquotient an der Stelle +2 ist positiv.	○	○
Der Differentialquotient an der Stelle –2 ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle –1.	○	○
Der Differentialquotient an der Stelle –1 ist (ungefähr) gleich groß wie der Differentialquotient an der Stelle +1.	○	○

Quelle: Exemplarische Aufgabenstellungen, Bifie 5.12.11

Beispiel: Interpretationsaufgaben

Für einen Adventmarkt sollen Perlensterne hergestellt werden. Den Materialbedarf für die verschiedenen Modelle kann man der folgenden Tabelle entnehmen.

Den Spalten der Tabelle entsprechen Vektoren in R^4: Materialbedarfsvektor S_1 für den Stern 1, S_2 für Stern 2, Kostenvektor K pro Packung zu 10 Stück, Lagerbestand L.

	Material Stern 1	Material Stern 2	Kosten pro Packung Perlen	Lagerbestand der Perlen–Packungen
Wachsperlen 6 mm	1	0	0,20 €	8
Wachsperlen 3 mm	72	84	0,04 €	100
Glasperlen 6 mm	0	6	0,90 €	12
Glasperlen oval	8	0	1,50 €	9

a) Was gibt $K \cdot L$ an?

b) Was gibt $\frac{1}{10}K$ an?

c) Von jedem Stern soll ein Probeexemplar hergestellt werden. Der Vektor S gibt den für die zwei Sterne benötigten Materialbedarf an.

Drücke S durch S_1 und S_2 aus und berechne S.

d) Berechne die Herstellungskosten für das Sternmodell 2. Berücksichtige, dass zu den Kosten für die Perlen pro Stern noch die Kosten von 0,50 € für 1m Silberdraht dazukommen.

e) Was gibt $S_1 \cdot K$ an?

f) Was gibt $(5 \cdot S_1 + 8 \cdot S_2) \cdot \frac{1}{10}K$ an?

g) Was gibt $10 \cdot L - (5 \cdot S_1 + 8 \cdot S_2)$ an? Berechne diese Zahl.

Quelle: Unterrichtsaufgabe 70 SRP, Bifie

Beispiel: Argumentationsaufgaben

Kreuze zu jedem angeführten Beispiel das richtige mathematische Modell an, **begründe** deine Entscheidung und **beschreibe** die Bedeutung der in den Modellen verwendeten Variablen.

a) Licht, das in eine dicke Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt. Der Hersteller eines Sicherheitsglases gibt an, dass die Intensität I des Lichts pro im Glas zurückgelegtem Zentimeter um 6% abnimmt.

Beschreibe die Lichtintensität I in Abhängigkeit der Eindringtiefe (in cm).

☐ $I(x) = I_0 \cdot 0{,}94^x$ ☐ $I(x) = I_0 \cdot 1{,}06^x$ ☐ $I(x) = \frac{I_0}{x}$ ☐ $I(x) = I_0 \cdot (1 - 0{,}06 \cdot x)$

Begründung:

Beschreibung:

b) Die Population P einer vom Aussterben bedrohten Tierart sinkt jedes Jahr um ein Drittel der Population des vorangegangenen Jahres.

Beschreibe die Population P in Abhängigkeit der Anzahl der abgelaufenen Jahre.

☐ $P(t) = P_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$ ☐ $P(t) = P_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ ☐ $P(t) = P_0 \cdot (1 - \frac{1}{3} \cdot t)$ ☐ $P(t) = \frac{P_0}{3t}$

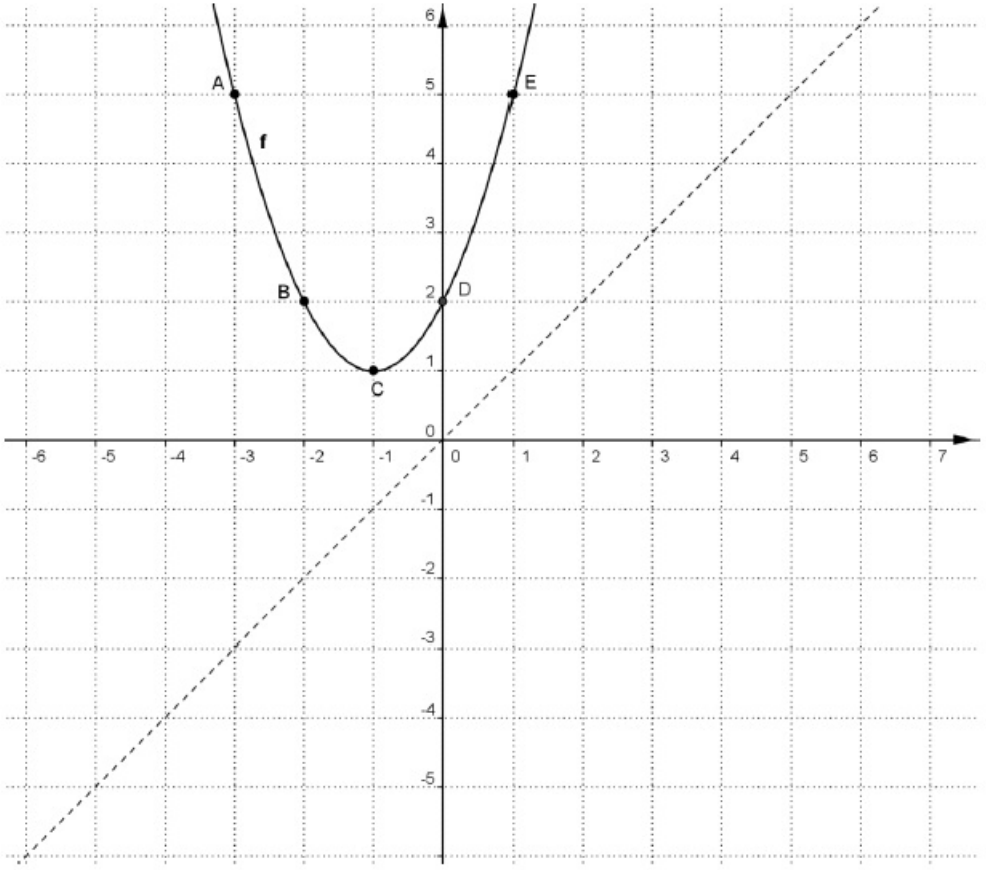
Begründung:

Beschreibung:

Quelle: Unterrichtsaufgabe 108 SRP, Bifie

Beispiel: Argumentationsaufgaben

In der Zeichnung ist der Graph einer reellen Funktion f(x) dargestellt.



a) Spiegle den Graph an der Geraden y = x (1.Mediane).

b) Begründe die Aussage: „Bei der neuen Kurve handelt es sich nicht um den Graphen einer reellen Funktion“.

c) Auf welche Art und Weise kann eine Wertetabelle des gespiegelten Graphen erstellt werden, wenn die Wertetabelle der ursprünglichen Funktion gegeben ist?

Quelle: Unterrichtsaufgabe 83 SRP, Bifie

Beispiel: Grundvorstellungen zum exponentiellen Wachstum/Abnahme

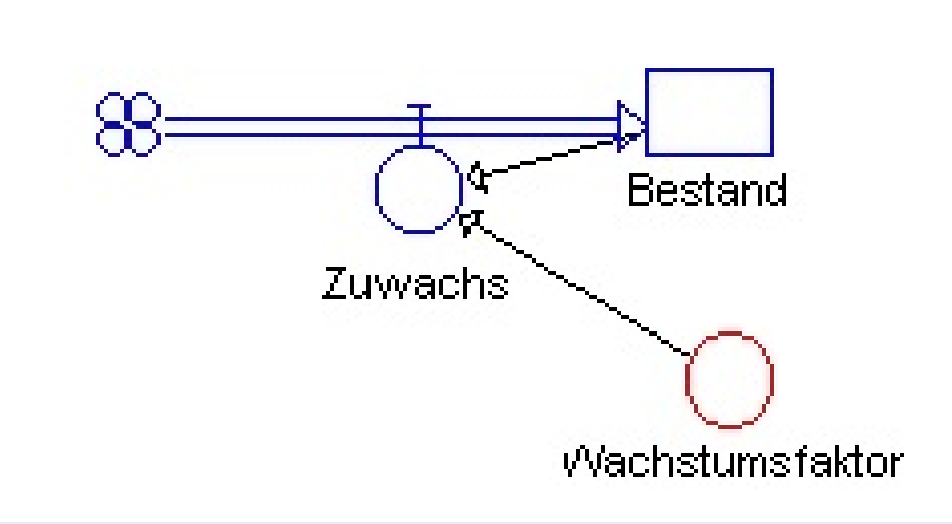
kontextorientierte/verbale Beschreibung

- Exponentielles Wachstum (Abnahme) bedeutet Wachstum (Abnahme)um den gleichen Faktor in der gleichen Zeiteinheit.
- Ein Wachstum, bei dem die Änderungsrate proportional zum aktuelllen Bestand ist, heißt exponentielles Wachstum.
- Neuer Bestand := Alter Bestand + Zuwachs
  (= proportional zum jeweils leitzten Bestand)

Beispiel: Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion

graphisch/geometrische Vorstellungen

- Exponentielles Wachstum (Abnahme) bedeutet: Der Zuwachs ist proportional zum aktuellen Bestand.



Beispiel: Grundvorstellungen zur Exponentialfunktion

Symbolisch/formale Vorstellungen

$$y_{n+1} = y_n + k \cdot y_n \qquad k_{disk} \in \mathbb{R}$$

$$y_n = y_0 \cdot (1+k)^n$$

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y_n \qquad k_{kont} \in \mathbb{R}$$

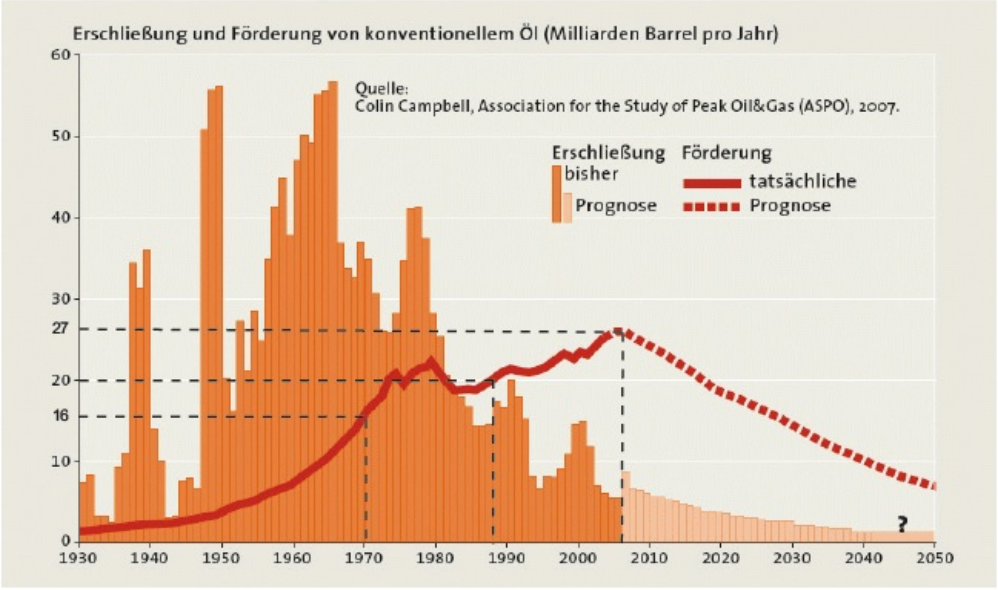
$$y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t} = y_0 \cdot (e^k)^t = y_0 \cdot a^t$$

Beispiel: Darstellungs-/Modellieraufgaben

Erdöl (Teil-2-Aufgabe)

Erdöl ist einer unserer wichtigsten Energieträger. Die Schätzungen, wie viel Erdöl wir in den nächsten Jahren noch fördern können, variieren sehr stark. Optimistische Schätzungen gehen von einer verfügbaren Restfördermenge von 1 250 Gigabarrel (der Faktor für 1 Giga ist 10^9) Rohöl ab dem Jahr 2010 aus.

Das Diagramm zeigt die Entwicklung der Erdölförderung in den letzten Jahren sowie die Entdeckung von Erdölvorkommen in Gigabarrel (Gbbl) pro Jahr.



Aufgabenstellungen:

a) Begründen Sie, warum ein lineares Wachstumsmodell für den Zeitraum von 1930 bis 1970 nicht geeignet ist. Geben Sie ein passendes Wachstumsmodell an und berechnen Sie mit diesem Modell und unter der Annahme, dass der Anstieg der Fördermenge sich genau so wie von 1930 bis 1970 weiter fortsetzt, wie viel Erdöl im Jahr 1980 gefördert worden wäre.

Quelle: Exemplarische Aufgabenstellungen, Bifie 5.12.11

Beispiel: Argumentationsaufgaben

Kreuze zu jedem angeführten Beispiel das richtige mathematische Modell an, **begründe** deine Entscheidung und **beschreibe** die Bedeutung der in den Modellen verwendeten Variablen.

a) Licht, das in eine dicke Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt. Der Hersteller eines Sicherheitsglases gibt an, dass die Intensität I des Lichts pro im Glas zurückgelegtem Zentimeter um 6% abnimmt.

Beschreibe die Lichtintensität I in Abhängigkeit der Eindringtiefe (in cm).

☐ $I(x) = I_0 \cdot 0{,}94^x$ ☐ $I(x) = I_0 \cdot 1{,}06^x$ ☐ $I(x) = \frac{I_0}{x}$ ☐ $I(x) = I_0 \cdot (1 - 0{,}06 \cdot x)$

Begründung:

Beschreibung:

b) Die Population P einer vom Aussterben bedrohten Tierart sinkt jedes Jahr um ein Drittel der Population des vorangegangenen Jahres.

Beschreibe die Population P in Abhängigkeit der Anzahl der abgelaufenen Jahre.

☐ $P(t) = P_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$ ☐ $P(t) = P_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$ ☐ $P(t) = P_0 \cdot (1 - \frac{1}{3} \cdot t)$ ☐ $P(t) = \frac{P_0}{3t}$

Begründung:

Beschreibung:

Quelle: Unterrichtsaufgabe 108 SRP, Bifie

- Danke für ihre Aufmerksamkeit

BLUM, W.; LEISZ, D.: Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe, in:
Mathematik lehren, H. 128, S. 18-21, 2005

BLUM, W. u. WIEGAND. B (1998): Wie kommen die deutschen TIMSS-Ergebnisse zustande?
In: TIMSS und der Mathematikunterricht, S.28-34

BM:UKK: Die kompetenzorientierte mündliche Reifeprüfung im Fach Mathematik an AHS, Wien 2012
(http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/ba/reifepruefung.xml)

DIJKSTRA, E.W.: Selected Writings on Computing: A Personal Perspective, Springer-Verlag, 1982.

DORFMAYR, A.; C.BRAND, J. LECHNER, A.MISTLBACHER, A.NUSSBAUMER Thema Mathematik 6. Veritas 2011 Linz,

EDELMANN, W. (1996): Begriffsbildung und Wissenserwerb aus lernpsychologischer Sicht. In: Hischer, H.(Hrsg: Rechenfertigkeit und Begriffsbildung angesichts von Computer-Algebra-Systemen, S.22-30.

FISCHER, R. (1996): Perspektiven des Mathematikunterrichts. In: Zentralblatt für Didaktik der
Mathematik 1996, Heft 2, S.42-46.

HOFE, R.v.(1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Spektrum, Heidelberg.

HOFE, R.v. (1996): Grundvorstellungen - Basis für inhaltliches Denken. In: Mathematik lehren, Heft 78, Oktober 1996, S. 4-8.

HOFE, R.v. (1996): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In Mathematik lehren, Heft 118, Juni 2003, S. 4-8.

MALLE, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Verlag Vieweg, Braunschweig,
Wiesbaden.

MALLE, G. (1997): Grundvorstellungen zur Prozentrechnung und zu Bruchzahlen. Skriptum
zur Lehrerfortbildung, Univ. Wien.

MALLE, G. (1999): Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotient. In: Didaktikreihe der ÖMG, Heft 30, S.67-78.

MALLE, G. (2004): Grundvorstellung im Mathematikunterricht. IMST-Berricht Schwerpunktguppe 1
http://imst3plus.uni-klu.ac.at/materialien/2004/s1_m_grundvorstellungenmatheunterricht_150104.pdf

REICHEL, H.-CH. (1993): Bildung durch Mathematik. In:KÖHLER, H. u. K.RÖTTEL: Mehr
Allgemeinbildung im Mathematikunterricht, Polygon Verlag, Buxheim.. S.113-126.

REICHEL, H.-Ch. (2000): Nachhaltiger Mathematikunterricht. HPT&ÖBV, Wien

REICHEL, H.-C., R. MÜLLER , G. HANISCH (1991): Lehrbuch der Mathematik 7.
Hölder-Pichler-Temsky, Wien.

VOLLRATH, H.-J.: Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Klett, 1984.